

文章编号: 1674-8085 (2022) 02-0022-06

# 生物传热方程中灌注率函数的数值反演算法

曹庆发, 胡 彬, 万 殊, \*王泽文

(东华理工大学理学院, 江西, 南昌 330013)

**摘 要:** 本文研究了一类生物传热方程的灌注率函数反演问题。基于附加的非局部条件和有限差分的 Crank-Nicolson 方法, 构造了重建灌注率函数的迭代算法; 经进一步简化后, 得到了反演灌注率的一个显格式。为克服计算的不稳定性, 引入移动平均滤波方法对误差数据进行去噪, 算例结果表明结合移动平均滤波去噪的数值反演算法是可行的, 能有效反演出灌注率函数。

**关键词:** 生物传热方程, 灌注率, 反问题, 有限差分, 移动平均

中图分类号: O29

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2022.02.004

## NUMERICAL METHOD FOR RECOVERING PERFUSION COEFFICIENT IN A BIOLOGICAL HEAT TRANSFER EQUATION

CAO Qing-fa, HU Bin, WAN Shu, \*WANG Ze-wen

(School of Science, East China University of Technology, Nanchang, Jiangxi 330013, China)

**Abstract:** The inversion of the perfusion coefficient function of a class of bioheat transfer equations is studied in this paper. Based on the additional non-local conditions and the Crank-Nicolson method of finite difference, an iterative algorithm for reconstructing the perfusion coefficient function is constructed; after further simplification, an explicit scheme for retrieving perfusion coefficient is obtained. In order to overcome the instability of calculation, the moving average filtering method is introduced to denoise the error data. The results of calculation examples show that numerical inversion algorithms combined with the moving average filtering denoising are feasible and effective for retrieving perfusion coefficient function.

**Key words:** bioheat transfer equation; perfusion coefficient; inverse problem; finite difference, moving average

## 0 引言

生物医学传热研究不仅在理论上很重要, 而且具有重要的实际应用价值<sup>[1]</sup>。例如, 生物传热方程已被应用于模拟高热、血栓形成和血管硬化等研究

中<sup>[2]</sup>。科学家提出了若干不同生物组织内的传热模型, 例如最常用的是由 Pennes 提出的生物传热模型<sup>[3]</sup>, 以及文献<sup>[4-6]</sup>提出连续型生物传热模型。

由 Pennes 提出的生物传热方程<sup>[3]</sup>为

$$\rho_t c_t \frac{\partial Z}{\partial t} = k_t \Delta Z - w_b C_b (Z - Z_a) + S \quad (1)$$

其中  $k_t$  是生物组织的热导率,  $Z$  是组织温度,  $w_b$  是

收稿日期: 2021-08-01; 修改日期: 2021-09-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(11961002, 11761007); 江西省教育厅科技计划项目(GJJ170444); 东华理工大学大学生科技创新基金项目

作者简介: 曹庆发(1996-), 男, 江西赣州人, 硕士生, 主要从事一般反问题的计算方法研究(E-mail:cqingfa58@163.com);

\*王泽文(1974-), 男, 江西上饶人, 教授, 博士, 主要从事一般反问题的计算方法研究(E-mail:zwwang6@163.com)。

血液灌注率,  $C_b$  是血液热容量,  $Z_a$  是动脉血的温度,  $S$  是与代谢和沉积有关的热源,  $\rho_l$  是生物组织的密度,  $c_l$  是生物组织的比热,  $t^*$  是时间变量。在一维空间中, 方程(1)可归结为下述无量纲形式<sup>[7]</sup>:

$$u_t = u_{xx} - p(t)u + f(x, t), 0 < x < 1, 0 < t \leq T \quad (2)$$

其中  $L$  为生物组织的长度,

$$p(t) = \frac{w_b C_b L^2}{k_l},$$

它反映了血液灌注率, 故称其为血液灌注率函数。

本文考虑重建生物热传导方程(2)中血液灌注率函数  $p(t)$  的反问题, 且  $u(x, t)$  满足初边值条件

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$u(0, t) = b_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(1, t) = b_1(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

和附加的非局部条件

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

其中  $f$ 、 $\varphi$ 、 $b_0(t)$ 、 $b_1(t)$  和  $E(t)$  为给定的已知函数, 且满足相容条件  $b_0(0) = \varphi(0)$  和  $b_1(1) = \varphi(1)$ 。如果已知系数  $p(t)$ , 求满足方程(2)和定解条件(3) -

(5) 的解则是正问题。在实际应用中, 附加的非局部条件中  $E(t)$  是测量所得, 往往带有随机测量误差, 即  $E(t) \approx E^\delta(t)$ , 且满足

$$\|E^\delta(t) - E(t)\| \leq \delta, \quad (7)$$

其中  $\delta$  是随机误差水平,  $\|\cdot\|$  表示空间  $L^2(0, T)$  的范数。

对于反问题(2) - (6), 直接利用文献[8]的方法和结论, 易得该反问题解是存在且唯一的, 而文献[9-10]则考虑了不同边界条件下反问题解的存在唯一性。在不同边界条件和附加条件下, 许多学者研究重建  $p(t)$  的数值解法。其中, 文献[7]利用基本解方法实现了对  $p(t)$  的反演; 文献[11-12]通过函数变换将反问题转化为一个源项反演问题, 然后通过数值微分实现  $p(t)$  的重建。文献[13]则将反问题归结为一个非线性优化问题, 然后利用 Levenberg-

Marquardt 实现数值反演; 文献[14-15]则利用边界元方法给出了相应的数值反演方法。文献[16-18]分别对于标准热传导方程和时间分数阶扩散方程中时间依赖源项反演问题进行了研究。

不同于文献[11-12], 本文受文献[16]中研究的启发, 提出一种有限差分的反演算法, 该方法无需事先将反问题转化为源项反演。本文接下来安排如下: 第二小节基于 Crank-Nicolson 格式给出两种有限差分的数值反演算法; 第三小节给出反问题的数值算例。

## 2 反问题的有限差分解法

### 2.1 反问题的数值解法

首先, 将区域  $[0, 1] \times [0, T]$  划分成  $M \times N$  网格, 其上的网格点为  $(x_m, t_n)$ , 且  $x_m = mh$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , 其中空间步长  $h = \frac{1}{M}$ , 时间步长  $\tau = T/N$ , 网格比为  $r = \tau/h^2$ , 记  $t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\tau$ ,  $u_m^n = u(x_m, t_n)$ ,  $p^{n+\frac{1}{2}} = p(t_{n+\frac{1}{2}})$ ,  $t_{n+\frac{1}{2}} = f(x_m, t_{n+\frac{1}{2}})$ , 而用  $U_m^n$  和  $P^{n+\frac{1}{2}}$  分别表示  $u(x_m, t_n)$  和  $p(t_{n+\frac{1}{2}})$  的有限差分近似解。

利用有限差分的 Crank-Nicolson 方法, 将方程(2)离散为

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + (u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1})}{2h^2} - p^{n+\frac{1}{2}} \frac{u_m^n + u_m^{n+1}}{2} + f_m^{n+\frac{1}{2}} + R_{mn}, \quad (8)$$

其中  $1 \leq m \leq M-1$ ,  $R_{mn}$  为余项。显然, 对于任意的  $m, n$ , 存在一个常数  $d_1$  使得

$$|R_{mn}| \leq d_1(\tau^2 + h^2) \quad (9)$$

由边界条件(3) - (5), 有

$$u_m^0 = \varphi(x_m), \quad u_0^n = b_0(t_n), \quad u_M^n = b_1(t_n) \quad (10)$$

对于附加条件(6), 利用数值积分的复化梯形公式得

$$\frac{h}{2}u_0^{n+1} + h\sum_{m=1}^{M-1}u_m^{n+1} + \frac{h}{2}u_M^{n+1} + Q_{n+1} = E^{n+1} \quad (11)$$

对于任意的  $n$ , 存在一个常数  $d_2$  使得

$$|Q_{n+1}| \leq d_2 h^2 \quad (12)$$

忽略 (8) 和 (11) 中的余项  $R_{mn}$  和  $Q_{n+1}$ , 将  $u_m^n$  替换成  $U_m^n$ ,  $p^{n+\frac{1}{2}}$  替换为  $P^{n+\frac{1}{2}}$ , 则得

$$(1+r+\frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}})U_m^{n+1} - \frac{r}{2}(U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) = ,$$

$$(1-r-\frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}})U_m^n + \frac{r}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) + \tau f_m^{n+\frac{1}{2}},$$

(13)

$$A(P^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} 1+r+\frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}} & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r+\frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1+r+\frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}} & -\frac{r}{2} \\ & & & & -\frac{r}{2} & 1+r+\frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & & & \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix},$$

$C$  是  $(M-1) \times 1$  的向量且为

$$C = [\frac{r}{2}(U_0^{n+1} + U_0^n) + \tau f_1^{n+\frac{1}{2}}, \tau f_2^{n+\frac{1}{2}}, \dots, \tau f_{M-2}^{n+\frac{1}{2}}, \frac{r}{2}(U_M^{n+1} + U_M^n) + \tau f_{M-1}^{n+\frac{1}{2}}]^T$$

于是, 由 (16) 和 (17) 式得到重建灌注率函数  $p(t)$  的迭代算法。

重建灌注率函数  $p(t)$  的迭代算法:

Step 1. 给定精度要求  $\varepsilon > 0$ , 和  $P^{n+\frac{1}{2}}$  的初始

$$U_m^0 = \varphi(x_m), \quad U_0^n = b_0(t_n), \quad U_M^n = b_1(t_n), \quad (14)$$

$$\frac{h}{2}U_0^{n+1} + h\sum_{m=1}^{M-1}U_m^{n+1} + \frac{h}{2}U_M^{n+1} = E^{n+1} \quad (15)$$

将 (13) - (14) 改写成矩阵形式为:

$$A(P^{n+\frac{1}{2}})U^{n+1} = BU^n - \frac{1}{2}\tau P^{n+\frac{1}{2}}U^n + C, \quad (16)$$

$$hW^T U^{n+1} = E^{n+1} - \frac{h}{2}U_0^{n+1} - \frac{h}{2}U_M^{n+1}, \quad (17)$$

其中  $U^n = [U_1^n, U_2^n, \dots, U_{M-1}^n]^T$ ,  $W = [1, 1, \dots, 1]^T$ ,

$A(P^{n+\frac{1}{2}})$  和  $B(P^{n+\frac{1}{2}})$  是  $(M-1) \times (M-1)$  的矩阵, 且

猜测  $P_0^{n+\frac{1}{2}}$ ;

Step 2. 计算矩阵  $A(P_k^{n+\frac{1}{2}})$ ;

Step 3. 计算

$$P_{k+1}^{n+\frac{1}{2}} = [hW^T (A(P_k^{n+\frac{1}{2}}))^{-1}BU^n + hW^T (A(P_k^{n+\frac{1}{2}}))^{-1}C - E^{n+1} + \frac{h}{2}U_0^{n+1} + \frac{h}{2}U_M^{n+1}] / \frac{1}{2}\tau hW^T (A(P_k^{n+\frac{1}{2}}))^{-1}U^n \quad (18)$$

Step 4. 如果  $|P_{k+1}^{n+\frac{1}{2}} - P_k^{n+\frac{1}{2}}| > \varepsilon$ , 则  $P_k^{n+\frac{1}{2}} = P_{k+1}^{n+\frac{1}{2}}$

转到 Step 2.;

Step 5. 输出  $P^{n+\frac{1}{2}} = P_{k+1}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $n = n+1$  转到 Step 1.

如果在 (8) 式中, 用  $u_m^n$  近似  $\frac{u_m^n + u_m^{n+1}}{2}$ , 并将  $u_m^n$

替换成  $U_m^n$ ,  $p^{n+\frac{1}{2}}$  替换为  $P^{n+\frac{1}{2}}$ , 则得差分格式

$$(1+r)U_m^{n+1} - \frac{r}{2}(U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) =$$

$$(1-r-\tau P^{n+\frac{1}{2}})U_m^n + \frac{r}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) + \tau f_m^{n+\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

上述差分格式的矩阵形式为

$$AU^{n+1} = BU^n - \tau P^{n+\frac{1}{2}}U^n + C, \quad (20)$$

其中  $A$  是  $(M-1) \times (M-1)$  的矩阵, 且

$$A = \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix}.$$

于是, 有  $U^{n+1} = A^{-1}BU^n - \tau P^{n+\frac{1}{2}}A^{-1}U^n + A^{-1}C$ , 代入 (17) 式, 即得

$$P^{n+\frac{1}{2}} = \frac{hW^T A^{-1}BU^n + hW^T A^{-1}C - E^{n+1} + \frac{h}{2}U_0^{n+1} + \frac{h}{2}U_M^{n+1}}{\tau hW^T A^{-1}U^n} \quad (21)$$

至此, 得到了重建灌注率函数  $p(t)$  的一个显格式 (21)。由于  $A$  是严格对角占优的, 故可得下述存在唯一性结论。

**定理 1** 如果  $W^T A^{-1}U^n \neq 0$ , 则由 (21) 得到灌注率函数  $p(t)$  的数值反演解  $P^{n+\frac{1}{2}}$  存在且唯一。

## 2.2 噪声处理的移动平均滤波

当在反演公式 (18) 和 (21) 中用含噪声的测量数据  $E^\delta(t)$  代替  $E(t)$  时, 测量数据的噪声将被处于分母的时间步长  $\tau$  放大, 因此需要对噪声进行处理。这里, 我们采用移动平均滤波方法进行去噪。移动平均滤波是基于统计规律, 将连续的采样数据看成一个长度固定为  $D$  的队列, 在得到新的一个测量数据后, 去掉上述队列中的第一个数据, 其余数据依次迁移, 并将新得到的采样数据插入作为队列的最后一个, 然后对队列进行算术平均运算, 并将

此平均作为本次测量的结果。本文采用的移动平均滤波的计算公式为:

$$J^{\delta,0} = E^{\delta,0}, \quad (22)$$

$$J^{\delta,1} = \frac{E^{\delta,0} + E^{\delta,1} + E^{\delta,2}}{3}, \quad (23)$$

$$J^{\delta,n+1} = \frac{E^{\delta,n-1} + E^{\delta,n} + E^{\delta,n+1} + E^{\delta,n+2} + E^{\delta,n+3}}{5}, \quad (24)$$

$$n-1, 2, \dots, N-3,$$

$$J^{\delta,N-1} = \frac{E^{\delta,N-2} + E^{\delta,N-1} + E^{\delta,N}}{3}, \quad (25)$$

$$J^{\delta,N} = E^{\delta,N}. \quad (26)$$

其中  $J^{\delta,n}$  为  $E^{\delta,n}$  经滤波去噪后的数据。在后续的数值算例中, 使用滤波去噪后的数据  $J^{\delta,n+1}$  进行反演计算。

## 3 数值算例

本小节给出两个数值算例以说明算法的可行性。在算例中, 均取  $M=200$ ,  $N=50$ ,  $T=1$ , 且按

$$E^\delta(t_j) = E(t_j) + \delta(2\text{rand}(t_j) - 1)E(t_j),$$

给数据加入随机噪声, 其中  $\delta$  是相对误差水平,  $\text{rand}(t)$  是一个随机向量, 其元素是  $(0,1)$  上的均匀分布。对于噪声数据, 将提出的有限差分反演方法与移动平均滤波方法相结合, 以获得更为稳定的重建结果。

**算例 1** 考虑生物传热反问题:

$$u_t = u_{xx} - p(t)u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = x^2(1-x^3), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\int_0^1 u(x,t) dx = E(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$f(x,t) = (-2 + 20x^3)e^{-(t+\frac{1}{2}t^2)},$$

其中精确解为

$$p(t) = 1+t, \quad u(x,t) = x^2(1-x^3)e^{-(t+\frac{1}{2}t^2)}.$$

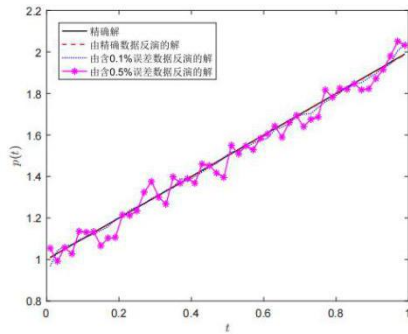
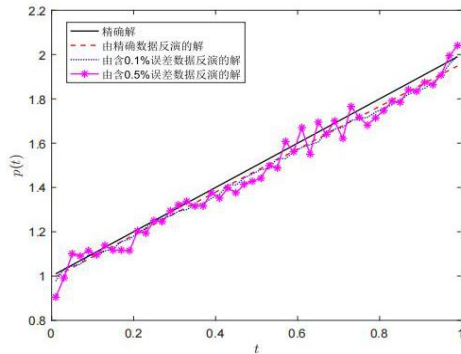
(a) 迭代算法反演的  $p(t)$ (b) 显格式 (21) 反演的  $p(t)$ 

图1 算例1的反演结果对比

Fig. 1 Comparison of inversion results of Example 1

**算例2** 考虑生物传热反问题:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - p(t)u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= 1 + x - x^2, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = e^{-t}, \quad 0 < t \leq T, \\ \int_0^1 u(x, t) dx &= E(t), \quad 0 < t \leq T, \\ f(x, t) &= (x^2 - x - 3 + 100t^3(1-t^2)(1+x-x^2))e^{-t}, \end{aligned}$$

其中精确解为

$$p(t) = 100t^3(1-t^2), \quad u(x, t) = (1+x-x^2)e^{-t}.$$

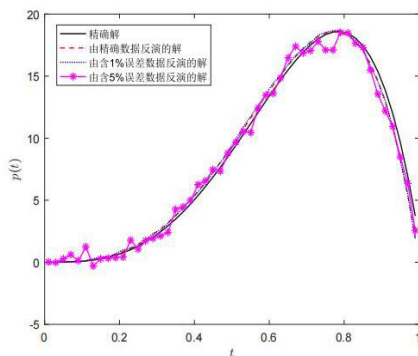
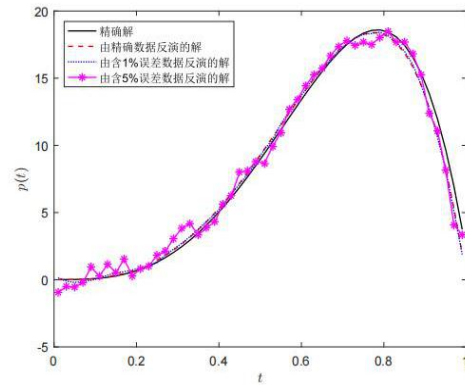
(a) 迭代算法反演的  $p(t)$ (b) 显格式 (21) 反演的  $p(t)$ 

图2 算例2的反演结果对比

Fig. 2 Comparison of inversion results of Example 2

数值算例的结果图1, 图2表明所给出的算法是可行的, 且迭代算法的数值反演效果更佳, 特别是在第二个数值算例中算法体现了较强的抗噪能力, 这可能是移动平均滤波对算例2的数据去噪效果更佳缘故。该方法也可以推广到求解高维生物传热方程的相关反问题。

## 参考文献:

- [1] Chato J C. Fundamentals of Bioheat Transfer[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [2] Liu J, Xu L X. Boundary information based diagnostics on the thermal states of biological bodies[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2000, 43(16): 2827-2839.
- [3] Pennes H H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm[J]. Journal of applied physiology, 1948, 1(2): 93-122.
- [4] Wulff W. The energy conservation equation for living tissue[J]. IEEE transactions on biomedical engineering, 1974 (6): 494-495.
- [5] Klinger H G. Heat transfer in perfused biological tissue—I: General theory[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1974, 36: 403-415.
- [6] Chen M M, Holmes K R. Microvascular contributions in tissue heat transfer[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1980, 335(1): 137-150.
- [7] Grabski J K, Lesnic D, Johansson B T. Identification of a time-dependent bio-heat blood perfusion coefficient[J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2016, 75: 218-222.
- [8] Lin Y. An inverse problem for a class of quasilinear parabolic equations[J]. SIAM journal on mathematical

- analysis, 1991, 22(1): 146-156.
- [9] Cannon J R, Lin Y, Wang S. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, Series B Applied mathematics, 1991, 33: 149-163.
- [10] Kerimov N B, Ismailov M I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2012, 396(2): 546-554.
- [11] Wang S, Lin Y. A finite-difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation[J]. Inverse Problems, 1989, 5(4): 631-640.
- [12] Ismailov M I, Kanca F. An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2011, 34(6): 692-702.
- [13] Ismailov M I, Bazán F S V, Bedin L. Time-dependent perfusion coefficient estimation in a bioheat transfer problem[J]. Computer Physics Communications, 2018, 230: 50-58.
- [14] Hazanee A, Lesnic D. Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 88: 259-266.
- [15] Trucu D, Ingham D, Lesnic D. An inverse coefficient identification problem for the bio-heat equation[J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2009, 17(1): 65-83.
- [16] Wang Z, Ruan Z, Huang H, et al. Determination of an unknown time-dependent heat source from A nonlocal measurement by finite difference method[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2020, 36(1): 151-165.
- [17] 黄何露,王泽文,阮周生,等. 一类扩散方程寻源反问题的有限差分法[J]. 赣南师范大学学报, 2018, 39(3): 20-23.
- [18] 邱淑芳,王泽文,曾祥龙,等. 一类时间分数阶扩散方程中的源项反演解法[J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2018, 42(6): 610-615.