文章编号：1674-8085（2022）02-0008-07

一类高阶椭圆型方程特征值的多项式特解法

张姊同，*曹艳华，朱挺欣

（华东交通大学理学院，江西，南昌　330013）

摘　要：通过给出一种求解高阶椭圆型偏微分方程特征值的多项式特解法，使用多项式特解作为基函数对 2 阶、4 阶、6 阶和 8 阶椭圆型偏微分方程进行求解，同时采用多尺度技巧降低系数矩阵的条件数，得到了稳定的数值解。数值算例表明该算法在求解高阶偏微分方程特征值问题时具有精度高、效果好等方面的优越性，进一步证明了多项式特解法具有较高的精度和良好的稳定性。

关键词：高阶椭圆型偏微分方程；特征值；多项式特解法；

中图分类号：O241.82　**文献标识码：**A　DOI：10.3969/j.issn.1674-8085.2022.02.002

POLYNOMIAL PARTICULAR SOLUTIONS FOR SOLVING EIGENVALUE PROBLEM OF A CLASS OF HIGHER ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

ZHANG Zi-tong, *CAO Yan-hua, ZHU Ting-xin

（School of Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang, Jiangxi 330013, China）

Abstract: The paper presents a method of polynomial particular solutions (MPPS) for eigenvalue problem of higher order elliptic partial differential equations. The second, fourth, sixth and eighth order elliptic partial differential equations are solved by using the polynomial particular solutions as the basis function, while the condition number of the coefficient matrix is reduced by using the multiscale technique, and a stable numerical solution is obtained. Numerical examples show that the algorithm has the advantages of high accuracy and good effect in solving eigenvalue problems of high-order partial differential equations, it is further proved that the polynomial particular solutions have high accuracy and good stability.

Key words: higher order elliptic partial differential equations; method of polynomial particular solutions; eigenvalue problem; innovation ability

0　引言

在工程领域，椭圆型偏微分方程特征值问题有广泛的应用，用于求区域的 Poincare 常数[1-2]的 Laplacian 特征值问题，复杂非线性方程谱理论中的特征值问题等[3]，在融合实验中的等离子物理学。天体物理学、流体流动的线性稳定性力学等也有广泛应用[4]。求解偏微分方程特征值上通常采用有限差分法(FDM)[5-6]和有限元法(FEM)[7-8]等，然而这些传统的方法在计算规模较大问题时，产生了需要对网格进行剖分、计算耗时长、增加计算成本等缺点。基于径向基函数的无网格方法在求解线性偏微分方程中的应用非常宽泛，例如 Kansa 方法。而特解法是在 Kansa 方法的基础上发展而来的，在这种方法中，把给定的函数在偏微分方程中的特解作为基

收稿日期：2021-11-01；修改日期：2021-12-11
基金项目：国家自然科学基金项目(11461026)；江西省研究生创新资金项目(YC2020-S313)
作者简介：张姊同(1997-)，女，吉林长春人，硕士生，主要从事微分方程数值解方面的研究(E-mail:Z15797676772@163.com)；
*曹艳华(1978-)，女，山东兖州人，副教授，博士，主要从事微分方程数值解方面的研究(E-mail:yanhuacao@yeah.net).

函数去近似数值解[9]，而不再直接作为基函数，和 Kansa 法相比，特解法的数值结果更精确有效，但其有着径向基函数形状参数不确定的问题。

采用多项式特解作为基函数的特解法(MPPS)[10]求解高阶椭圆型偏微分方程的特征值问题，基于多项式特解的基函数形状参数是确定的，解决了上述问题，使特解法更精确，更易于实现。该方法有计算格式简单，配置节点灵活的特点，因此可以应用于高维的规则区域和不规则区域，是求解偏微分方程的有效方法[11-12]。考虑如下特征值问题：

$$\begin{cases}\left(\varepsilon^2\Delta^m-\lambda\right)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\\ \Delta^j u=g_j(x),\ j=0,1,\cdots,m-1,x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 为 R^2 中的有界区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$0<\varepsilon\le 1$，m 为正整数，λ 为特征值，f 和 $g_j(j=0,1,\cdots,m\text{-}1)$ 为光滑函数。

1 多项式特解法

本节简要介绍多项式特解法求解偏微分方程的步骤。考虑下面偏微分方程的边值问题：

$$\begin{cases}Lu(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ Bu(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

上式中的 L 是线性微分算子，B 是某种边界算子，函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 是给定函数，$\Omega\in R^2$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，假设(2)的解 $u(x,y)$ 可以表示为：

$$u(x,y)\simeq\hat{u}(x,y)=\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}a_{ij}u_p^{ij}(x,y),\tag{3}$$

其中 a_{ij} 是待定系数，则方程(2)可以表示：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}a_{ij}Lu_p^{ij}(x_k,y_k)=f(x_k,y_k), & k=1,2,\cdots,n_i,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}a_{ij}Bu_p^{ij}(x_k,y_k)=g(x_k,y_k), & k=n_i+1,n_i+2,\cdots,n,\end{cases}\tag{4}$$

其中：

$$Lu_p^{ij}(x,y)=x^{i-j}y^j,\qquad 0\le j\le i,0<i<s,\tag{5}$$

本文采用配点法，设 n_i 是计算域 Ω 中的内点数，n_b 是 $\partial\Omega$ 中的边界点数，配置点的总数为 $n=n_i+n_b$，$\left\{(x_i,y_i)\right\}_{i=1}^{n_i}$ 是计算域 Ω 内的内点的集合，$\left\{(x_i,y_i)\right\}_{i=n_i+1}^{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的边界点，把式(5)代入方程组(4)可以得到：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}a_{ij}x_k^{i-j}y_k^j=f(x_k,y_k),\ k=1,2,\cdots,n_i,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i}a_{ij}Bu_p^{ij}(x_k,y_k)=g(x_k,y_k),k=n_i+1,n_i+2,\cdots,n,\end{cases}\tag{6}$$

利用最小二乘法求得方程组(6)的最小二乘解，得到：

$$\left\{a_{ij}\right\}=\left\{a_{00},a_{10},a_{11},a_{20},a_{21},a_{22},\cdots,a_{ss}\right\},$$

式(3)结合计算得到的待定系数 a_{ij} 给出近似解 $\hat{u}(x,y)$。

定理 1.1[10] 对于如下常系数二维二阶偏微分方程的一般形式，给出了求解偏微分方程的步骤：

$$\begin{aligned}&a_1\frac{\partial^2u_p}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2u_p}{\partial x\partial y}+a_3\frac{\partial^2u_p}{\partial y^2}+\\&a_4\frac{\partial u_p}{\partial x}+a_5\frac{\partial u_p}{\partial y}+a_6u_p=x^my^n,\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\{a_i\}_{i=1}^6$ 是常实数且 $a_6\ne 0$，m,n 为正整数，则式(7)的特解为：

$$u_p=\frac{1}{a_6}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{-1}{a_6}\right)^kL^k\left(x^my^n\right),\tag{8}$$

其中 $N=m+n$，

$$L=a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_3\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_4\frac{\partial}{\partial x}+a_5\frac{\partial}{\partial y},$$

证明 式(7)可以写成：

$$(L+a_6I)u_p=x^my^n,\tag{9}$$

其中 I 是单位算子，式(9)又可以改写成以下形式：

$$\left(I+\frac{L}{a_6}\right)\left(a_6u_p\right)=x^my^n,\tag{10}$$

由于 L 是含有各种偏导数的线性偏微分算子，因此 $L^{m+n+1}(x^my^n)=0$，因此下面定义是成立的：

$$\left(I+\left(\frac{L}{a_6}\right)^{N+1}\right)x^m y^n = x^m y^n, \tag{11}$$

其中 $N=m+n$，通过直接代数分解，有：

$$I+\left(\frac{L}{a_6}\right)^{N+1}=\left(I+\frac{L}{a_6}\right)\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{-1}{a_6}\right)^k L^k, \tag{12}$$

综上有：

$$\left(I+\frac{L}{a_6}\right)\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{-1}{a_6}\right)^k L^k\left(x^m y^n\right)=x^m y^n, \tag{13}$$

联立式(10)和式(13)，有以下等式成立：

$$a_6 u_p=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{-1}{a_6}\right)^k L^k(x^m y^n), \tag{14}$$

因此，得到了上述偏微分算子的特解 u_p：

$$u_p=\frac{1}{a_6}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{-1}{a_6}\right)^k L^k(x^m y^n), \tag{15}$$

此生成特解 u_p 的方法可以推广到更高阶的常系数偏微分算子上，在此不再证明。

2 数值结果

为了衡量多项式特解法的精度和准确性，采用如下形式的均方根误差(RMSE)和相对于 x 的导数的均方根误差(RMSEx)，定义如下：

$$\text{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\left|\hat{u}_j-u_j\right|^2}, \tag{16}$$

$$\text{RMSEx}=\sqrt{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\left|\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x}-\frac{\partial u_j}{\partial x}\right|^2}, \tag{17}$$

其中， n_t 是区域 Ω 内测试点的数量， $\hat{u}_j$ 和 u_j 分别是第 j 个测试点的近似解和实际解。

文章所有的插值点都是由蒙特卡罗方法生成的随机点[13]，此外，文章使用的多尺度技巧是一种预处理技巧[14]，减小了多项式特解法生成矩阵的条件数，使得多项式基函数在多项式基函数阶数变大时是稳定的。

例 2.1 参数 $\varepsilon=1, m=1$ 的线性椭圆型方程的特征值问题

$$\begin{cases}(\Delta-\lambda)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\\ \qquad u(x,y)=g_0(x,y),\ (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{18}$$

式(18)的解析解为：

$$u(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y),$$

本文的数值例子均考虑规则的单位方形区域，其参数方程式如下：

$$\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\},$$

$$\partial\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\},$$

单位方形区域的剖面图如图 1 所示。

算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$f(x,y)=(-2-\lambda)(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$
$$g_0(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y),$$

内点、边界点和测试点的数目分别为 3000 个、600 个和 441 个，这些点是随机分布的。

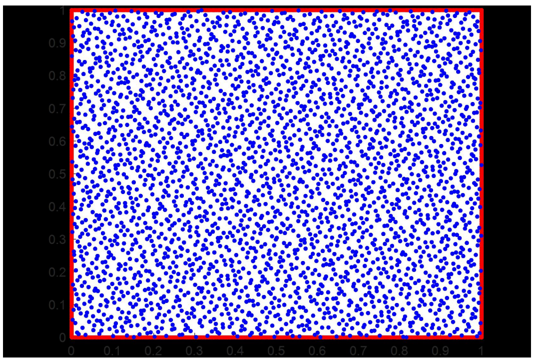

图 1 计算域 Ω 剖面图

Fig. 1 The profile of the computational domain Ω

图 2 给出了不同 λ 的误差对比图，结果表明， $\lambda=100$ ， $\lambda=200$ 和 $\lambda=300$ 的 RMSEx 在精度上差别不大，随着多项式基函数阶的变大，RMSEx 均逐渐降低至 10^{-14}，并保持稳定，表明 2 阶的线性椭圆型偏微分方程的特征值问题在多项式基函数阶为 15 阶后是十分稳定的。在图 3 中，比较了使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧时，不同阶的多项式基函数的 RMSE 。其中使用了多尺度技巧的多项式特解法，其 RMSE 随着多项式基函数阶数的增加逐渐减小至 10^{-15} 并保持稳定，而未使用多尺度技巧的多项式特解法，从多项式基函数的阶为 18 阶开

始，其 RMSE 陡然增长，得到较大误差。

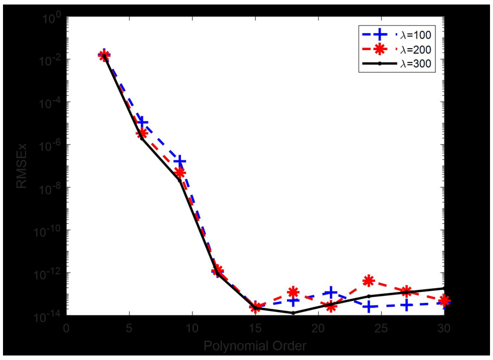

图 2　不同 λ 误差对比图

Fig.2　Comparison diagram of different λ RMSEx

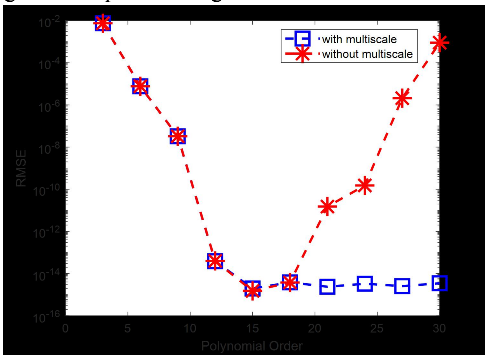

图3　使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧的误差图

Fig.3　RMSE graphs with and without multiscale techniques

表1对比了2阶椭圆型方程的三种特征值的 RMSE，结果表明，对于多项式特解法求解高阶椭圆型方程，RMSE 都非常稳定，误差十分小，分别保持在10^{-15}、10^{-14}左右。由于多尺度技巧在解决合成矩阵病态问题和提高数值精度方面有关键作用，所以本文所有例子都会使用这种技巧

表1　2阶椭圆型方程在不同阶数多项式基函数下的不同 λ 的 RMSE 对比

Table 1　RMSE comparison of different λ for second order elliptic equations under polynomial basis functions of different orders

Polynomial Order	RMSE ($\lambda=100$)	RMSE ($\lambda=200$)	RMSE ($\lambda=300$)
3	$2.08e-03$	$1.59e-03$	$1.52e-03$
6	$1.49e-06$	$3.15e-07$	$1.40e-07$
9	$1.80e-08$	$4.53e-09$	$1.59e-09$
12	$8.86e-14$	$8.78e-14$	$5.16e-14$
15	$4.81e-15$	$2.05e-15$	$1.68e-15$
18	$1.61e-14$	$9.06e-15$	$1.72e-15$
21	$1.13e-14$	$4.62e-15$	$2.76e-15$
24	$4.28e-15$	$3.42e-14$	$8.82e-15$
27	$4.96e-15$	$7.74e-15$	$2.73e-14$

例 2.2　参数 $\varepsilon=1, m=2$ 的线性椭圆型方程的特征值问题。

$$\begin{cases}\left(\Delta^2-\lambda\right)u(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)=g_0(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega,\\ \Delta u(x,y)=g_1(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases} \qquad (19)$$

式(19)的解析解为：

$u(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)$，算子

$$\Delta^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$f(x,y)=(4-\lambda)(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

$$g_0(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y),$$

$$g_1(x,y)=-2(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

内点、边界点和测试点的数目分别为 3000 个、600 个和 441 个，这些点是随机分布的。图 4 给出了不同特征值 λ 的误差对比图，结果表明，$\lambda=100$，$\lambda=200$ 和 $\lambda=300$ 的 RMSEx 在精度上差别不大，随着多项式基函数阶数的变大，RMSEx 均逐渐降低至 10^{-15}，并保持稳定，表明 4 阶的线性椭圆型偏微分方程的特征值问题在多项式基函数阶为 18 阶后是十分稳定的。在图 5 中，比较了使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧时，不同阶的多项式基函数的 RMSE 。其中使用了多尺度技巧的多项式特解法，其 RMSE 随着多项式基函数阶数的增加逐渐减小至 10^{-15} 并保持稳定，而未使用多尺度技巧的多项式特解法，从多项式基函数的阶为 15 阶开始，因为条件数过高，其 RMSE 陡然增长，得到较大误差。

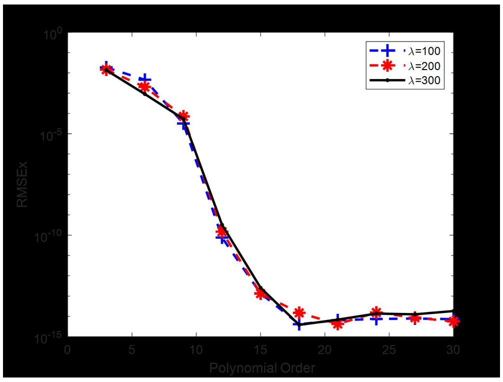

图 4　不同λ误差对比图

Fig.4　Comparison diagram of differentλ RMSEx

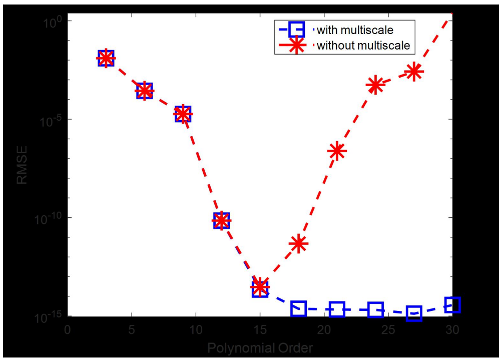

图5　使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧的误差图

Fig.5　RMSE　graphs with and without multiscale techniques

表2对比了4阶椭圆型偏微分方程的三种特征值λ的RMSE，结果表明，使用多项式特解法求解4阶椭圆型偏微分方程，其RMSE在多项式基函数阶数为18阶后十分小，均保持在 10^{-15} 左右，都非常稳定。

表2　4阶椭圆型方程在不同阶数多项式基函数下的不同λ的RMSE对比

Table 2　RMSE comparison of different λ for fourth order elliptic equations under polynomial basis functions of different orders

Polynomial Order	RMSE ($\lambda=100$)	RMSE ($\lambda=200$)	RMSE ($\lambda=300$)
3	$3.73e-02$	$1.87e-02$	$1.25e-02$
6	$1.93e-03$	$6.48e-04$	$2.76e-04$
9	$2.78e-05$	$3.49e-05$	$1.84e-05$
12	$7.25e-12$	$1.99e-11$	$7.03e-1$
15	$8.76e-15$	$1.15e-14$	$2.22e-14$
18	$3.18e-15$	$4.63e-15$	$2.34e-15$
21	$1.53e-15$	$8.71e-16$	$2.16e-15$
24	$4.35e-15$	$3.41e-15$	$2.06e-15$
27	$3.09e-15$	$2.09e-15$	$1.32e-15$
30	$5.96e-15$	$2.15e-15$	$3.64e-15$

例 2.3　参数 $\varepsilon=1, m=3$ 的线性椭圆型方程的特征值问题。

$$\begin{cases} \left(\Delta^3-\lambda\right)u(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)=g_0(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega, \\ \Delta u(x,y)=g_1(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega, \\ \Delta^2 u(x,y)=g_2(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{20}$$

式(20)的解析解为：

$u(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)$，算子

$$\Delta^3=\frac{\partial^6}{\partial x^6}+3\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+3\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^6}{\partial y^6},$$

$$f(x,y)=(-8-\lambda)(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

$$g_0(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y),$$

$$g_1(x,y)=-2(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

$$g_2(x,y)=4(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

内点、边界点和测试点的数目分别为3000个、600个和441个，这些点是随机分布的。图6给出了不同λ的RMSEx对比图，结果表明6阶椭圆型偏微分方程的3种特征值λ都有较高精确度，误差都极小，均在10^{-15}左右保持稳定，表明6阶椭圆型偏微分方程的特征值问题在多项式基函数的阶为18阶后是十分稳定的。图7中，我们比较了使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧时，不同阶的多项式基函数的RMSE，起初这两种方法的RMSE均随着多项式基函数的阶数的增大而减小，但从基函数的阶15阶开始，不使用多尺度技巧的多项式特解法，其误差明显增大，呈直线增长。而使用多尺度技巧的多项式特解法的RMSE一直保持减小，逐渐减小至10^{-15}，并保持稳定。

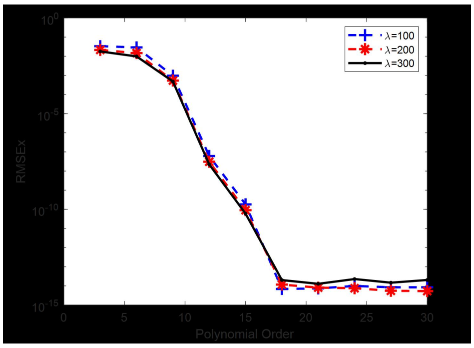

图 6　不同λ误差对比图

Fig.6　Comparison diagram of different λ RMSEx

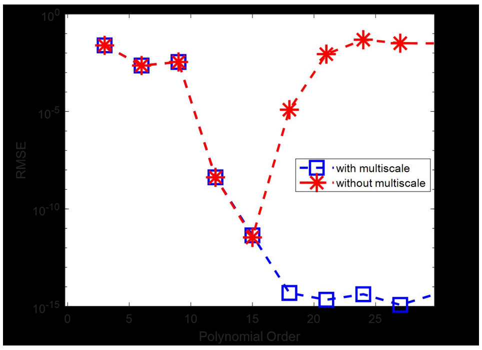

图 7　使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧的误差图

Fig.7　RMSE　graphs with and without multiscale techniques

表 3 对比了 6 阶椭圆型方程的三种特征值λ的RMSE，结果表明，使用多项式特解法求解 6 阶椭圆型偏微分方程的不同特征值时，其RMSE均非常稳定，误差十分小，保持在 10^{-15} 左右，其中λ=300

时的 RMSE 相比 λ=100 和 λ=200 时的 RMSE 变大，误差有所提升，说明 6 阶椭圆型偏微分方程特征值的系数对其误差有影响。

表 3　6 阶椭圆型方程在不同阶数多项式基函数下的不同 λ 的 RMSE 对比

Table 3　RMSE comparison of different λ for elliptic equations of order 6 under polynomial basis functions of different orders

Polynomial Order	RMSE ($\lambda=100$)	RMSE ($\lambda=200$)	RMSE ($\lambda=300$)
3	$3.35e-02$	$2.13e-02$	$1.78e-02$
6	$2.89e-02$	$1.46e-02$	$9.77e-03$
9	$9.57e-04$	$5.35e-04$	$4.81e-04$
12	$6.10e-08$	$3.06e-08$	$2.23e-08$
15	$1.82e-10$	$9.02e-11$	$5.96e-11$
18	$6.87e-15$	$1.17e-14$	$2.01e-14$
21	$7.38e-15$	$8.09e-15$	$1.28e-14$
24	$9.93e-15$	$7.53e-15$	$2.27e-14$
27	$8.42e-15$	$5.53e-15$	$1.47e-14$
30	$8.40e-15$	$5.31e-15$	$2.03e-14$

例 2.4 参数 $\varepsilon=1, m=4$ 的线性椭圆型方程的特征值问题。

$$\begin{cases}\left(\Delta^4-\lambda\right)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)=g_0(x,y),\ \ (x,y)\in\partial\Omega,\\ \Delta u(x,y)=g_1(x,y),\ (x,y)\in\partial\Omega,\\ \Delta^2 u(x,y)=g_2(x,y),\ \ (x,y)\in\partial\Omega,\\ \Delta^3 u(x,y)=g_3(x,y),\ \ (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{21}$$

式(21)的解析解为

$$u(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y),$$

算子

$$\Delta^4=\frac{\partial^8}{\partial x^8}+4\frac{\partial^8}{\partial x^6\partial y^2}+6\frac{\partial^8}{\partial x^4\partial y^4}+4\frac{\partial^8}{\partial x^2\partial y^6}+\frac{\partial^8}{\partial y^8},$$

$$f(x,y)=(16-\lambda)(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

$$g_0(x,y)=\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y),$$

$$g_1(x,y)=-2(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

$$g_2(x,y)=4(\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)),$$

$$g_3(x,y)=-8(\sin(x)\sin(y))+\cos(x)\cos(y)),$$

内点、边界点和测试点的数目分别为3000个、600个和441个，这些点是随机分布的。图8给出了不同 λ 的误差对比图，结果表明8阶椭圆型偏微分方程特征值问题的三种 $\lambda=100$、$\lambda=200$ 和 $\lambda=300$ 都有较高的精确度，误差都极小至10^{-14}左右，表明8阶椭圆型偏微分方程的特征值问题在多项式基函数阶为21阶后是十分稳定的。在图9中，我们比较了使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧时，不同阶的多项式基函数的RMSE变化，使用多尺度技巧的误差逐渐变小至10^{-15}左右，并持续保持稳定，精确度较高，而不使用多尺度技巧的多项式特解法在多项式基函数阶为15阶之后，因为条件数过高，误差呈直线增长，变得极其不稳定。

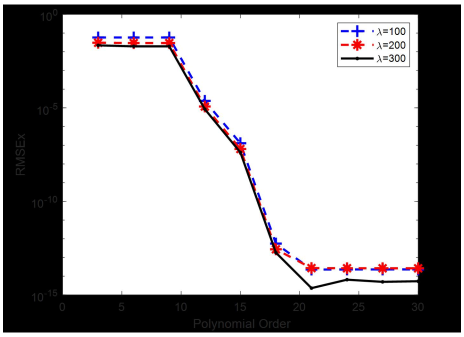

图 8　不同 λ 误差对比图

Fig.8　Comparison diagram of different λ RMSEx

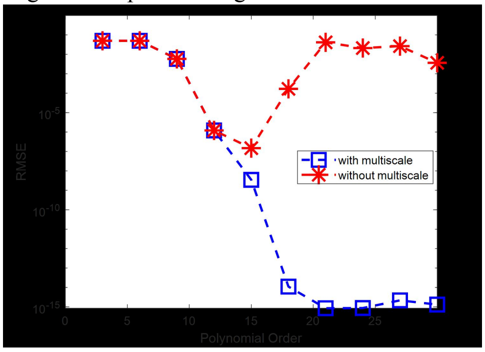

图 9　使用多尺度技巧和不使用多尺度技巧的误差图

Fig.9　RMSE　graphs with and without multiscale technique

表 4 对比了 8 阶椭圆型方程的三种特征值 λ 的 RMSE，结果表明，随着多项式基函数阶数的递增，用多项式特解法求解 8 阶椭圆型偏微分方程三种特征值问题时的 RMSE 都非常小，其误差逐渐降低至 10^{-15} 左右，并保持稳定。

表 4　8 阶椭圆型方程在不同阶数多项式基函数下的不同 λ 的 RMSE 对比

Table 4　RMSE comparison of different λ for elliptic equations of order 8 under polynomial basis functions of different orders

Polynomial Order	RMSE ($\lambda=100$)	RMSE ($\lambda=200$)	RMSE ($\lambda=300$)
3	$5.81e-02$	$3.04e-02$	$2.20e-02$
6	$5.79e-02$	$2.92e-02$	$1.95e-02$
9	$5.79e-02$	$2.92e-02$	$1.95e-02$
12	$2.36e-05$	$1.19e-05$	$8.55e-06$
15	$1.28e-07$	$6.33e-08$	$4.15e-08$
18	$5.51e-13$	$2.73e-13$	$1.80e-13$
21	$2.26e-14$	$2.70e-14$	$2.30e-15$
24	$2.28e-14$	$2.65e-14$	$6.49e-15$
27	$2.30e-14$	$2.64e-14$	$4.97e-15$
30	$2.29e-14$	$2.64e-14$	$5.36e-15$

图10比较了在同一参数$\varepsilon=1$，$\lambda=100$下，用多项式特解法求解2阶、4阶、6阶和8阶椭圆型偏微分方程的精确度和稳定性，图中显示了随着多项式基函数阶的变大，各个阶数的RMSE都呈线性递减至10^{-15}，并持续保持稳定，在多项式基函数的阶数在21阶后，用多项式特解法求解8阶椭圆型方程的RMSE最小，证明了使用多项式特解法求解高阶椭圆型偏微分方程的特征值问题是十分有效的。

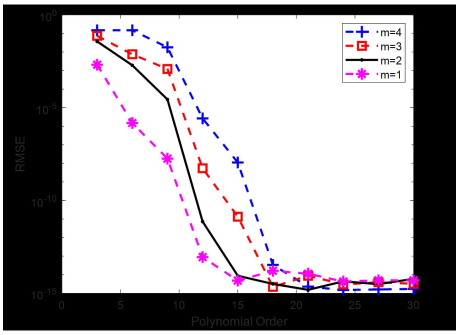

图 10　参数$\varepsilon=1$，$\lambda=100$时不同 m 的误差对比图
Fig.10　RMSE　comparison diagram of different m when parameter $\varepsilon=1$, $\lambda=100$

3　结论

和传统的数值方法例如有限差分法相比较，使用基于径向基函数的特解法求解偏微分方程特征值问题更高效、更简单，文章用多项式特解的基函数代替径向基函，使用$\{1,x,y,x^2,xy,y^2,x^3,x^2y,\cdots\}$这组基作为特解的右端项，同时使用了多尺度技巧，解决了产生的病态矩阵等问题，得到了稳定且精确度较高的数值结果，降低了MATLAB程序运行的难度，在计算上更加快捷。

本文验证了多项式特解法求解高阶椭圆型偏微分方程特征值问题的有效性，得到了较高的精度和很好的稳定性，进一步证明了该方法可以推广到更高阶、更复杂的椭圆型偏微分方程的特征值问题，或者高阶偏微分方程的边值问题等。与其他经典的求解特征值问题的数值方法相比，多项式特解法有以下优点：

1）多项式特解法把偏微分方程中给定函数的特解作为基函数去近似数值解[9]，而不再直接作为基函数，使得到的数值结果和Kansa法相比更精确；

2）多项式特解法使用基于多项式特解的形状参数确定的基函数，解决了特解法中径向基函数形状参数不确定的问题，和特解法相比更易于实现，数值结果更稳定；

3）多项式特解法的精度和稳定性都极好，易于编程，计算速度很快；

4）多项式特解法对求解高维复杂不规则域的偏微分方程是十分有效的。

参考文献：

[1] Kikuchi F, Liu X. Estimation of interpolation error constants for the P0 and P1 triangular finite elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(37-40): 3750-3758.

[2] Sebestova I, Vejchodsky T. Two-sided bounds for eigenvalues of differential operators with applications to friedrichs, poincaré, trace, and similar constants[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 2013, 52(1): 308-329.

[3] Plum M. Explicit H2-estimates and pointwise bounds for solutions of second-order elliptic boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 165(1): 36-61.

[4] Grebenkov D S, Nguyen B T. Geometrical structure of Laplacian eigenfunctions[J]. Siam Review, 2012, 55(4): 601-667.

[5] Kuttler J R. Direct methods for computing eigenvalues of the finite-difference laplacian[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 1974, 11(4):732-740.

[6] Tao L, Liem C, Shin T. A fourth order finite difference approximation to the eigenvalues of a clamped plate[J]. Journal of Computational Mathematics, 1988, 6: 267-271.

[7] Babuŝka I, Osborn J E. Eigenvalue problems[J]. Handbook of Numerical Analysis, 1991, 2(1):183-201.

[8] Babuŝka I, Osborn J E. Finite element-Galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems[J]. Mathematics of Computation, 1989, 52(186): 275-297.

[9] 刘燕山.无网格特解法求解非线性椭圆方程[D].成都:电子科技大学,2018.

[10] Dangal T R, Chen C S, Lin J. Polynomial particular solutions for solving elliptic partial differential equations[J].Computers and Mathematics with Applications, 2017, 73: 60-70.

[11] Cao Y H, Kuo L H. Hybrid method of space-time and Houbolt methods for solving lineartime-dependent problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2021, 128: 58-65.

[12] Cao Y H, Chen C S, Zheng H. Space-time polymial particular solutions method for solving time-dependent problems[J]. Numer Heat Transf Part B: Fundam, 2020, 77(3): 181-194.

[13] 曹艳华,李楠,张姊同,等,一维分方程的多项式特解方法(英文)[J]. 应用数学, 2020, 33(2): 295-307.

[14] Liu C S. A multiple-scale trefftz method for an incomplete cauchy problem of biharmonic equation[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements,2013, 37(11): 1445-1456.