文章编号：1674-8085（2022）02-0001-07

求解绝对值方程的多元谱梯度投影方法

华 瑜，*马昌凤
（福建师范大学数学与统计学院，福建，福州 350007）

摘 要：受多元谱梯度投影算法(MMSGP)的启发，对该方法进行改进，用于求解绝对值方程（AVE），在梯度差中加入松弛因子，$y_{k-1}=\lambda(F_k-F_{k-1})+(2-\lambda)rs_{k-1}$ 并引用一种新的线搜索策略，从而实现减少迭代次数和加快收敛速度的效果，并证明了该算法在适当的假设条件下是全局收敛的。数值实验表明，改进后的算法是可行的和有效的。

关键词：绝对值方程；多元谱梯度投影算法；全局收敛性；数值实验
中图分类号：O224.2 **文献标识码**：A DOI：10.3969/j.issn.1674-8085.2022.02.001

MULTIVARIATE SPECTRAL GRADIENT PROJECTION METHOD FOR SOLVING ABSOLUTE VALUE EQUATION

HUA Yu, *MA Chang-feng
（School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350007, China）

Abstract: Inspired by the multivariate spectral gradient projection algorithm (MMSGP), the method is improved to solve the absolute value equation (AVE), and the relaxation factor is added to the gradient difference $y_{k-1}=\lambda(F_k-F_{k-1})+(2-\lambda)rs_{k-1}$ and a new line search strategy is quoted to reduce the number of iterations and speed up the convergence speed, and it proves that the algorithm is globally convergent under appropriate assumptions. Numerical experiments show that the improved algorithm is feasible and effective.

Key words: absolute value equation; multivariate spectral gradient projection algorithm; global convergence; numerical experiment

0 引言

本文考虑如下绝对值方程(AVE)

$$Ax-|x|=b\text{，} \tag{1}$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$x,b\in\mathbb{R}^n$，$|x|$ 表示对向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 的每个分量去绝对值。

绝对值方程是由 O.L. Mangasarian 等人[1]提出的特殊且不可微的优化问题。在文献[2]中证明了确定 AVE(1) 的解的存在是 NP-hard 问题。由于绝对值方程广泛分布于优化领域，一般的线性互补问题，线性规划问题，凸二次规划等数学规划问题，见文献[3-5]都可以等效的以 AVE(1) 的形式重新表述，于是如何求解绝对值方程引起了许多研究者的关注。

求解绝对值方程 AVE(1) 的方法有很多，不同的角度提出了不同的方法，许多研究者提出了数值迭代法求解 AVE(1)。在文献[6]中 D.K. Salkuyeh 提出 Picard-Hss 迭代法求解，在文献[7-8]中 Ke 等人

收稿日期：2021-11-19；修改日期：2021-12-29
基金项目：国家自然科学基金项目(11901098)；福建省自然科学基金项目(2020J05034)
作者简介：华 瑜(1996-)，女，福建三明人，硕士生，主要从事数值代数研究(E-mail: 806162057@qq.com)；
*马昌凤(1962-)，男，湖南邵阳人，教授，博士生导师，主要从事数值代数及其应用研究(E-mail:macf@fjnu.edu.cn).

和 Guo 等人提出求解绝对值方程(AVE)的 SOR 类迭代方法，该方法是通过将 AVE 等效地重新表述为 2×2 块非线性方程而获得。在文献[3]中 M.Zamani 等人提出一种基于凹极小化方法的新方法，通过将绝对值方程 AVE 等价于最小化问题进行求解。

许多求解绝对值方程的数值方法，主要基于非线性优化技术，例如：文献[11-12]中将谱梯度方法应用到无约束的非线性方程组。谱梯度方法的主要特点是搜索方向不需要雅克比矩阵，每次迭代只需要较低的计算量而受到广泛关注。在文献[13]中，L.Grippo 等人提出经典的谱梯度方法。根据谱梯度方法的原理，L.Han 等人在文献[14]中引入多元谱梯度算法。

基于超平面投影的思想，将求解无约束优化问题的多元谱梯度方法推广到求解大规模的单调非线性方程组，该方法的优点是算法不需要方程组的梯度信息，因而可以用于求解非光滑方程组, 无需假设可微的条件下，也能建立算法的全局收敛性，算法不需要计算和存储矩阵, 因而适合求解大规模问题。在假设 1 不是 A 的特征值的基础上，AVE 可以简化为无约束的非线性单调方程组求解，值得一提的是，在文献[15]中，L. Grippo 等人将多元谱梯度投影方法用于求解绝对值方程。

以下介绍谱梯度算法[13]和多元谱梯度投影算法[15]迭代形式：

对于无约束最优化问题：

$$\min_{x\in R^n} f(x)$$

1）谱梯度方法迭代形式：$x_{k+1}=x_k-s_k g_k$，其中，$s_k=\alpha_k I, g_k=\triangledown f(x_k)$. α_k 通过极小化 $\|\alpha s_{k-1}-y_{k-1}\|^2$ 得到，$s_{k-1}=x_k-x_{k-1}, y_{k-1}=g_k-g_{k-1}$. 从而

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k g_k \tag{2}$$

其中

$$\alpha_k=\frac{s_{k-1}^{\top}s_{k-1}}{s_{k-1}^{\top}y_{k-1}} \tag{3}$$

2）多元谱梯度投影方法迭代形式：

$$d_k=-diag\left\{\frac{1}{\lambda_k^1},\frac{1}{\lambda_k^2},\ldots,\frac{1}{\lambda_k^n}\right\}F\left(x_k\right) \tag{4}$$

$$x_{k+1}=P_{\Omega}\left[x_k-\zeta_k F\left(z_k\right)\right] \tag{5}$$

其中

$$z_k=x_k+\beta^{m_k}d_k,\zeta_k=\frac{F\left(z_k\right)^{\top}\left(x_k-z_k\right)}{F\left(z_k\right)^2} \tag{6}$$

本文受文献[15]的启发，将多元谱梯度投影方法用于求解绝对值方程(AVE)，通过对现有的算法进行改进，在梯度差中加入松弛因子 $y_{k-1}=\lambda(F_k-F_{k-1})+(2-\lambda)rs_{k-1}$，并结合文献[16]采用的一种新的线搜索策略，达到减少迭代次数和加快收敛速度的效果，分析绝对值方程的性质，并讨论该算法在适当的假设下的全局收敛性。数值实验表明，改进后的算法的有效性。

本文后续部分安排如下：第 2 节介绍预备知识，提出求解绝对值方程的多元谱梯度投影算法；第 3 节全局收敛性分析；第 4 节引用绝对值方程的例子进行数值比较；第 5 节结论。

1 预备知识和算法

在本节，将介绍求解绝对值方程(AVE) 的改进的多元谱梯度投影算法。首先，引入投影算子 $P_{\Omega}[v]$ 的定义。

定义 1 投影算子是从 $\mathbb{R}^n$ 到一个非空闭凸集 Ω 的映射：

$$P_{\Omega}[v]=\arg\min_{v}\|u-v\|,\quad u,v\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

其中，$\|x\|$ 表示 x 的欧几里得范数。

投影算子 $P_{\Omega}[v]$ 具有如下性质：

$$P_{\Omega}[u]-P_{\Omega}[v]\le\|u-v\|, u,v\in\mathbb{R}^n \tag{8}$$

令

$$F(x):=Ax-|x|-b, \tag{9}$$

将问题(1) 转化为(9)，根据多元谱梯度方法求解绝

对值方程的思想，提出改进的多元谱梯度投影算法如下：

算法 1（MMSGP 算法）

步 0 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，参数 $\sigma, \beta \in (0,1)$，$0 < r \le 1$，$0 < \alpha_{\min} \le 1$，$\alpha_0 = 1^n$，置 $k = 0$。

步 1 如果 $\| F(x_k) \| = 0$，或满足其他的终止条件，则停止。

步 2 计算搜索方向：

$(2.a)$ 如果 $k = 0$，令 $d_k = -F_k$，其中 $F_k = F(x_k)$。

$(2.b)$ 如果 $\frac{y_{k-1}^i}{s_{k-1}^i} > 0$，那么令 $\lambda_k^i = \frac{y_{k-1}^i}{s_{k-1}^i}$，

否则，

$$\lambda_k^i = \frac{s_{k-1}^\top y_{k-1}}{s_{k-1}^\top s_{k-1}},$$

其中，

$s_{k-1} = x_k - x_{k-1}, y_{k-1} = \lambda(F_k - F_{k-1}) + (2-\lambda) r s_{k-1}$.

$(2.c)$ 如果 $\lambda_k^i \le \tau$ 或 $\lambda_k^i \ge \frac{1}{\tau}$，则令 $\lambda_k^i = \delta$，

计算 $d_k = -diag\left\{\frac{1}{\lambda_k^1}, \frac{1}{\lambda_k^2}, \dots, \frac{1}{\lambda_k^n}\right\} F\left(x_k\right)$， （10）

其中，$i = 1, 2, \cdots, n$。

步 3 计算 $z_k = x_k + \alpha_k d_k$，其中 $\alpha_k = \beta^{m_k}$，m_k 是最小非负整数，使得

$$-F\left(x_k + \beta^m d_k\right)^\top d_k \ge \sigma \gamma_k \beta^m d_k^{\ 2} \tag{11}$$

其中 $\gamma_k := \frac{\| F(z_k) \|}{1 + \| F(z_k) \|}$。

步 4 通过超平面投影更新的迭代点：

$$x_{k+1} = P_\Omega[x_k - \zeta_k F(z_k)], \tag{12}$$

其中

$$\zeta_k = \frac{F\left(z_k\right)^\top \left(x_k - z_k\right)}{F\left(z_k\right)^2} \tag{13}$$

步 5 令 $k = k + 1$ 并回到步 1。

注：1）无需求解步 2 中目标函数的梯度 $\nabla F(x_k)$，本算法与文献[15]的多元谱梯度投影方法的区别在于，在梯度差中加入了松弛因子 $y_{k-1} = \lambda(F_k - F_{k-1}) + (2-\lambda) r s_{k-1}$ 和采用了新的线搜索策略。

2）$x_k - \zeta_k F(z_k)$ 是 x_k 在超平面 $H_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle F(z_k), x - z_k \rangle \le 0\}$ 上的投影。

3）由步（2.c）化简可得，

$$\min\left\{\epsilon, \frac{1}{\delta}\right\} F\left(x_k\right) \le d_k \le \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\delta}\right\} F\left(x_k\right) \tag{14}$$

2 收敛性分析

在本节，对算法 1 生成的序列 $\{x_k\}$ 的全局收敛性进行分析。

命题 1 若 $A - E$ 半正定，则 $F(x)$ 是单调的。

证明：对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$，定义四个集合 I_1, I_2, I_3, I_4 如下：

$$I_1 = \left\{i \in R \mid x_i \ge 0, y_i \ge 0\right\}, I_2 = \left\{i \in R \mid x_i \ge 0, y_i \le 0\right\}$$

$$I_3 = \left\{i \in R \mid x_i \le 0, y_i \ge 0\right\}, I_4 = \left\{i \in R \mid x_i \le 0, y_i \le 0\right\}$$

一方面：

$$\begin{aligned}
&\langle |x| - |y|, x - y \rangle = \\
&\sum_{i\in I_1} \left\langle |x_i| - |y_i|, x_i - y_i \right\rangle + \sum_{i\in I_2} \left\langle |x_i| - |y_i|, x_i - y_i \right\rangle + \\
&\quad \sum_{i\in I_3} \left\langle |x_i| - |y_i|, x_i - y_i \right\rangle + \sum_{i\in I_4} \left\langle |x_i| - |y_i|, x_i - y_i \right\rangle = \\
&\sum_{i\in I_1} \left\langle x_i - y_i, x_i - y_i \right\rangle + \sum_{i\in I_2} \left\langle x_i - y_i + 2y_i, x_i - y_i \right\rangle + \\
&\quad \sum_{i\in I_3} \left\langle y_i - x_i + 2x_i, y_i - x_i \right\rangle + \sum_{i\in I_4} \left\langle -x_i + y_i, x_i - y_i \right\rangle
\end{aligned}$$

注意到，

$$\sum_{i\in I_2} \left\langle 2y_i, x_i - y_i \right\rangle \le 0, \sum_{i\in I_3} \left\langle 2x_i, y_i - x_i \right\rangle \le 0,$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\left\langle |x| - |y|, x - y \right\rangle \le \\
&\sum_{i\in I_1} \left\langle x_i - y_i, x_i - y_i \right\rangle + \sum_{i\in I_2} \left\langle -x_i + y_i, x_i - y_i \right\rangle + \\
&\quad \sum_{i\in I_3} \left\langle x_i - y_i, x_i - y_i \right\rangle + \sum_{i\in I_4} \left\langle -x_i + y_i, x_i - y_i \right\rangle \le
\end{aligned}$$

$$\sum_{i\in I_1}\langle x_i-y_i,x_i-y_i\rangle+\sum_{i\in I_2}\langle x_i-y_i,x_i-y_i\rangle+$$
$$\sum_{i\in I_3}\langle x_i-y_i,x_i-y_i\rangle+\sum_{i\in I_4}\langle x_i-y_i,x_i-y_i\rangle=$$
$$\sum_{i\in I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4}\langle x_i-y_i,x_i-y_i\rangle=$$
$$(x-y)^T(x-y)$$

另一方面，

$$\langle F(x)-F(y),x-y\rangle=$$
$$\langle Ax-|x|-b-Ay+|y|+b,x-y\rangle=$$
$$\langle Ax-Ay-|x|+|y|,x-y\rangle=$$
$$(x-y)^\top A(x-y)-\langle |x|-|y|,x-y\rangle\geq$$
$$(x-y)^\top A(x-y)-(x-y)^\top(x-y)\geq$$
$$(x-y)^\top(A-E)(x-y)$$

E 为 n 维单位矩阵，因此，A-E 为半正定时，$F(x)$ 是单调的。

命题 2 若存在常数 $L\geq 0$，使得

$$\|F(x)-F(y)\|\leq L\|x-y\| \qquad (15)$$

成立，则 $F(x)$ 是 Lipschitz 连续。

证明：对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$，$F(x)=Ax-|x|-b$，有

$$\|F(x)-F(y)\|=\|Ax-|x|-Ay+|y|\|=$$
$$\|A(x-y)-(|x|-|y|)\|\leq$$
$$\|A(x-y)\|+\||x|-|y|\|\leq$$
$$\|A\|\|x-y\|+\|x-y\|=$$
$$(\|A\|+1)\|x-y\|$$

因为 $\|A\|\geq 0$，于是存在常数 $L=\|A\|+1$，使得 Lipschitz 连续条件成立。

以下引理证明算法 1是适定的。

引理1 基于上述命题，存在非负整数 m_k 使得线搜索(11)对任意的 $k\geq 0$ 都是适定的。

证明：假设存在 $k_0\geq 0$，使得任何非负整数 m 都不满足(11) 即

$$-F(x_{k_0}+\beta^m d_{k_0})^T d_{k_0}<\sigma\gamma_k\beta^m\|d_{k_0}\|^2$$

令 $m\to\infty$，由 F 的连续性，可得

$$-\langle F(x_{k_0}),d_{k_0}\rangle\leq 0 \qquad (16)$$

由步 1 和步 2，对任意 $k\geq 0$，有 $F(x_k)\neq 0$，$d_k\neq 0$，从而可以推得

$$-\langle F(x_0),d_0\rangle=-\langle F(x_0),F(x_0)\rangle>0,$$

和

$$\langle -F(x_k),d_k\rangle=$$
$$\left\langle -F(x_k),-diag\left\{\frac{1}{\lambda_k^1},\frac{1}{\lambda_k^2},\ldots,\frac{1}{\lambda_k^n}\right\}F(x_k)\right\rangle\geq$$
$$\min\left\{\epsilon,\frac{1}{\delta}\right\}F(x_k)^2>0 \qquad (17)$$

其中，$k\geq 0$ 这与(16)矛盾，因此证明成立，线搜索(11)是适定的。

以下证明算法 1的全局收敛性。

引理 2 假设 $F(x)$ 的解集 S 非空，且 $F(x)$ 是 Lipschitz 连续，那么，算法 1 生成的序列 $\{x_k\},\{z_k\}$ 是有界的，且有以下两个式子成立。

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-z_k\|=0 \qquad (18)$$

和

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{k+1}-x_k\|=0 \qquad (19)$$

证明：

$$\langle F(z_k),x_k-z_k\rangle=-\lambda_k\langle F(z_k),d_k\rangle=$$
$$-\lambda_k\langle F(x_k+\lambda_k d_k),d_k\rangle\geq$$
$$-\sigma\gamma_k\lambda_k^2\|d_k\|^2=$$
$$\sigma\gamma_k\|x_k-z_k\|^2>0, \qquad (20)$$

其中 $\gamma_k:=\dfrac{\|F(z_k)\|}{1+\|F(z_k)\|}\in(0,1)$。

由(8)和(12)得

$$\|\xi_{\kappa+1}-\xi^*\|^2=\|\Pi_\Omega[\xi_\kappa-\zeta_\kappa\Phi(\zeta_\kappa)]-\xi^*\|^2\leq$$
$$\|\xi_\kappa-\zeta_\kappa\Phi(\zeta_\kappa)-\xi^*\|^2=$$
$$\|\xi_\kappa-\xi^*\|^2-2\zeta_\kappa\langle\Phi(\zeta_\kappa),\xi_\kappa-\xi^*\rangle+\zeta_\kappa^2\|\Phi(\zeta_\kappa)\|^2 \qquad (21)$$

令 x^* 是 $F(x)$ 的一个解，由 F 的单调性，得

$$\langle F(z_k), x_k - x^* \rangle = \langle F(z_k), x_k - z_k \rangle + \langle F(z_k), z_k - x^* \rangle \geq \langle F(z_k), x_k - z_k \rangle + \langle F(z^*), z_k - x^* \rangle = \langle F(z_k), x_k - z_k \rangle. \quad (22)$$

根据(20)-(22)可得：

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\zeta_k \langle F(z_k), x_k - x^* \rangle + \zeta_k^2 \|F(z_k)^2\| = \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\langle F(z_k), x_k - z_k \rangle^2}{\|F(z_k)\|^2} \leq \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\sigma^2 \gamma_k^2 \|x_k - z_k\|^4}{\|F(z_k)\|^2} = \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\sigma^2 \|x_k - z_k\|^4}{1 + \|F(z_k)\|^2}. \quad (23)$$

因此，序列 $\{\| x_k - x^* \|\}$ 是递减且收敛的，从而序列 $\{x_k\}$ 有界。由 F 的连续性，可知，存在常数 $M > 0$，使得

$$\|F(x_k)\| \leq M, \forall k \geq 1 \quad (24)$$

由 $F(x)$ 的单调性和（20），根据柯西-施瓦兹不等式，有

$$\|F(x_k)\| \geq \frac{\langle F(x_k), x_k - z_k \rangle}{\|x_k - z_k\|} \geq \frac{\langle F(z_k), x_k - z_k \rangle}{\|x_k - z_k\|} \geq \sigma\gamma_k \|x_k - z_k\|. \quad (25)$$

由(24)得 $\sigma\gamma_k \| x_k - z_k \| \leq \| F(x_k) \| \leq M$。因此序列 $\{z_k\}$ 也是有界的。

根据(23) 和(24) 有

$$\frac{\sigma^2 \gamma_k^2}{M^2} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - z_k\|^4 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 \right) < \infty \quad (26)$$

从而

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - z_k\| = 0$$

因为 $x_k \in \Omega$，根据(8)，(12)和柯西-施瓦兹不等式，得

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|P_\Omega [x_k - \zeta_k F(z_k)] - x_k\| \leq \|(x_k - \zeta_k F(z_k)) - x_k\| = \|\zeta_k F(z_k)\| = \frac{F(z_k)^\top (x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|} \leq \|x_k - z_k\|. \quad (27)$$

因此，$\lim_{k \to \infty} \| x_{k+1} - x_k \| = 0$。

定理 1 假设 $\{x_k\}$ 是由算法1生成的序列，若 $\{x_k\}$ 是有限的，则 $\{x_k\}$ 收敛到 $F(x) = 0$ 的一个解，若 $\{x_k\}$ 是无限的，那么存在一个子序列 $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ 使得

$$\lim_{k \to \infty} \|x_{k_j} - x^*\| = 0,$$

其中 x^* 满足 $F(x^*) = 0$。

证明：由引理 2和 $z_k = x_k + \alpha_k d_k$，可得

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - z_k\| = \lim_{k \to \infty} \alpha_k \|d_k\| = 0$$

因为

$\min\{\epsilon, \frac{1}{\delta}\} \| F(x_k) \| \leq \| d_k \| \leq \max\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\delta}\} \| F(x_k) \|$，且 $\| F(x_k) \| < M$，则 $\{d_k\}$ 有界。

以下将讨论两种可能的情况：

1）若 $\liminf_{k \to \infty} \| d_k \| = 0$，由上式可得：$\liminf_{k \to \infty} \| F(x_k) \| = 0$。因此，存在子序列 $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ 使得 $\lim_{k_j \to \infty} \| F(x_{k_j}) \| = 0$。根据 $F(x)$ 的连续性，则 $\lim_{k_j \to \infty} \| x_{k_j} - x^* \| = 0$，其中 x^* 满足 $F(x^*) = 0$。

2）若 $\liminf_{k \to \infty} \| d_k \| > 0$，由于 $\lim_{k \to \infty} \alpha_k \| d_k \| = 0$，则 $\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0$。

因为 $\{x_k\}$ 有界，则至少存在一个聚点,使得子序列 $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ 收敛到这个聚点。设 m_{k_j} 是最小的非

负整数，有 $\alpha_{k_j}=\beta^{m_{k_j}}$，且满足线搜索(11)，

$$-F\left(z_{k_j}\right)^{\top} d_{k_j} \geq \sigma \gamma_{k_j} \alpha_{k_j}\left\|d_{k_j}\right\|^2$$

其中 $z_{k_j}=x_{k_j}+\alpha_{k_j} d_{k_j}, \gamma_{k_j}=\dfrac{\| F(z_{k_j})\|}{1+\| F(z_{k_j})\|} \in(0,1)$。

另一方面，

$$-F\left(\tilde{z}_{k_j}\right)^{\top} d_{k_j} \geq \frac{\sigma}{\beta} \alpha_{k_j} \tilde{\gamma}_{k_j}\left\|d_{k_j}\right\|^2 \qquad (28)$$

其中，

$$\tilde{z}_{k_j}=x_{k_j}+\frac{1}{\beta} \alpha_{k_j} d_{k_j}, \tilde{\gamma}_{k_j}=\frac{\| F(\tilde{z}_{k_j})\|}{1+\| F(\tilde{z}_{k_j})\|} \in(0,1).$$

因为 $\lim\limits_{k \rightarrow \infty} \alpha_k=0$,则 $\lim\limits_{k_j \rightarrow \infty} \alpha_{k_j}=0$。于是有

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} \tilde{z}_{k_j}-x_{k_j}=0 .$$

由 F 的连续性，序列 d_k 是有界的，那么

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty}(F(x_{k_j})-F(\tilde{z}_{k_j}))^T d_{k_j}=0 \qquad (29)$$

于是根据(15)，(28)，(29)，有

$$0 \leq \min \left\{\epsilon, \frac{1}{\delta}\right\} \lim_{k_j \rightarrow \infty}\left\|F\left(x_{k_j}\right)\right\|^2 \leq$$

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty}\left(-F\left(x_{k_j}\right)^{\top} d_{k_j}\right)=\lim_{k_j \rightarrow \infty}\left(-F\left(\tilde{z}_{k_j}\right) d_{k_j}\right)<0 \qquad (30)$$

因此 $\lim\limits_{k_j \rightarrow \infty}\| F(x_{k_j})\|=0$。又由于 $F(x)$ 的连续性，可得 $\lim\limits_{k \rightarrow \infty}\| x_{k_j}-x^*\|=0$，其中 x^* 满足 $F(x^*)=0$。

根据(1)与 $F(x)$ 的等价性，可以得到子序列 $\{x_{k_j}\}$ 也收敛到(1)的解。

综上，算法 1的全局收敛性证明完毕。

3　数值实验

在本节中，将本文的算法与文献[15]中的方法相比较来求解绝对值方程，引用三个绝对值方程的例子，验证本文算法的有效性，因为本文是通过在梯度差中加入松弛因子 λ，实现加快收敛速度的效果。所以将松弛因子分别取为 $\lambda=1.6$ 和 $\lambda=0.6$，对比进行低松弛迭代和超松弛迭代的迭代次数。当 $\lambda=1$ 时，则退化为文献[15]中的算法, 所有方法的程序采用 MATLAB R2015b 编写。

设置参数 $\beta=0.5, \sigma=0.01, r=0.1, \tau=0.001$, 当 $\| F(x_k)\| \leq 10^{-6}$ 时，迭代终止。

表 1　符号说明

Table 1　Symbol description.

Dim	算例测试的维数
Iter	迭代次数
Time	算法终止的时间
Norm	$\left\|Ax_k-\lvert x_k\rvert-b\right\|_2$

算例 1[8]　考虑绝对值方程(1)

$$A=tridiag(-1,8,-1)=$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}
8 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 8 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 8 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 8 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 8
\end{array}\right]$$

$b=Ax^*-|x^*|$，其中 $x^*=(-1,1,-1,1, \cdots,-1,1)^{\top}$。迭代从 $x_0=(1,1,1,1, \cdots, 1,1)^{\top}$ 开始。实验结果显示在表 2。

表 2　算例 1的数值结果

Table 2　Numerical results of calculation example 1

Dim	*MMSGP*			$MMSGP_h$ $\lambda=1.6$			$MMSGP_h$ $\lambda=0.6$		
	Iter	*Time*	*Norm*	*Iter*	*Time*	*Norm*	*Iter*	*Time*	*Norm*
2	24	0.002	8.12e - 07	20	0.001	4.45e - 07	17	0.001	6.36e - 07
5	38	0.002	9.44e - 07	23	0.001	8.47e - 07	36	0.001	7.68e - 07
10	55	0.007	9.54e - 07	24	0.001	9.13e - 07	37	0.003	4.47e - 07
50	58	0.005	9.76e - 07	29	0.001	8.34e - 07	42	0.008	6.21e - 07
150	60	0.011	6.98e - 07	28	0.002	8.78e - 07	36	0.008	6.26e - 07
200	64	0.010	5.44e - 07	31	0.008	5.42e - 07	39	0.008	7.58e - 07
2000	66	1.000	9.96e - 07	33	0.049	7.13e - 07	45	0.65	7.49e - 07

从表 2 中可以观察到，加入松弛因子 λ 后的迭代次数明显少于文献[15]中的方法 (MMSGP) 的迭代次数，并且令 $\lambda=1.6$ 的效果也优于 $\lambda=0.6$ 的效果。

算例 2[18]　绝对值方程(1)矩阵 A 由 MATLAB 命令随机产生，

$$A=round(100*(eye(n,n)-$$
$$0.02*(2*rand(n,n)-ones(n,n))))$$

选择一个随机向量 $x \in \mathbb{R}^n$,计算 $b=Ax-|x|$。最后，在[-5,5]中随机生成 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 作为迭代过程的起点，设矩阵维数为 n=10。实验结果由表 3 给出。

表 3 算例 2 的数值结果

Table 3 Numerical results of calculation example 2

Dim	*MMSGP*			*MMSGP*$_h$ $\lambda=1.6$			*MMSGP*$_h$ $\lambda=0.6$		
	Iter	*Time*	*Norm*	*Iter*	*Time*	*Norm*	*Iter*	*Time*	*Norm*
10	33	0.003	9.08e - 07	23	0.001	5.43e - 07	26	0.002	3.82e - 07

算例 2 中 A 和 b 都是随机产生的，由于算例的随机性，所以固定矩阵维数为 $n=10$ 作为实验依据，表 3 可以看出，加入松弛因子 λ 后的迭代次数少于文献[15]中的方法 (MMSGP) 的迭代次数，并且令 $\lambda=1.6$ 的效果也优于 $\lambda=0.6$ 的效果。

算例 3[19]绝对值方程(1)矩阵 A 由以下形式得到，

$$a_{ii}=4n, a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=n, a_{ij=0.5}, i=1,2,\cdots,n.$$

设 $b=(A-E)e$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，e 的元素为全 1 的 $n\times1$ 维列向量。

最后令 $x_0=(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,)^T$, 为初始向量，其中 $a_i=0.001*i, i=1,2,\cdots,n$。实验结果由表 4 给出。

表 4 算例 3 的数值结果

Table 4 Numerical results of calculation example 3

Dim	*MMSGP*			*MMSGP*$_h$ $\lambda=1.6$		
	Iter	*Time*	*Norm*	*Iter*	*Time*	*Norm*
8	45	0.005	5.52e-07	28	0.001	9.39e-07
128	90	0.37	6.33e-07	24	0.023	8.80e-07
200	71	0.099	9.63e-07	50	0.034	9.91e-07
1500	123	11	8.60e-07	103	9	9.98e-07

本算例给出的 A 是对角线为 4n，次对角线相等，其余元素都为 0.5 的矩阵，表 4 可以看出，加入松弛因子后的迭代次数少于文献[15]中的方法（MMSGP）的迭代次数，且 CPU 时间更短。

4 结论

通过以上的数值结果，可以得出结论，本文所改进的算法优于文献[15]中的方法（MMSGP），在迭代次数和 CPU 时间上表现明显，关于改进多元谱梯度投影算法的方法有很多，下降方向的选取对迭代效果也有一定的影响，之后将继续研究如何对下降方向进行改进，实现更好的迭代效果。

参考文献：

[1] Mangasarian O L , Meyer R R . Absolute value equations[J]. Linear Algebra Appl,2006,419(2-3): 359-367.

[2] Mangasarian O L . Absolute value programming[J]. Comput. Optim. Appl, 2007, 36(1): 43-53.

[3] Zamani M, Hladík M. A new concave minimization algorithm for the absolute value equation solution[J]. Optimization Letters, 2021: 1-14.

[4] Bai Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. Numer. Linear Algebr, 2010, 17(6): 917-933.

[5] Mangasarian O L. A hybrid algorithm for solving the absolute value equation[J].Optim.Lett., 2015,9(7): 1469-1474.

[6] Salkuyeh D K.The picard-HSS iteration method for absolute value equations[J].Optim.Lett., 2014,8:2191-2202.

[7] Ke Y F, Ma C F. SOR-like iteration method for solving absolute value equations[J]. Appl. Math. Comput, 2017, 311: 195-202.

[8] Guo P, Wu S L, Li C X. On the SOR-like iteration method for solving absolute value equations [J].Appl. Math. Lett, 2019,97: 107-113.

[9] Mangasarian O L. Absolute value equation solution via concave minimization[J]. Optim. Lett, 2007, 1(1): 3-8.

[10] Mangasarian O L. A generalized Newton method for absolute value equations[J]. Optim. Let.,2009, 3: 101-108.

[11] Cruz W La, Raydan M. Nonmonotone spectral methods for large-scale nonlinear systems[J]. Optim. Methods Softw, 2003: 583-599.

[12] Cruz W La, Martínez J M , Raydan M. Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations[J].Math. Comput., 2006,75: 1449-1466.

[13] Grippo L, Lampariello F, Lucidi S. A nonmonotone line search technique for Newton's method[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1986, 23: 707-716.

[14] Han L, Yu G, Guan L, Multivariate spectral gradient method for unconstrained optimization[J]. Appl. Math. Comput.,2008,201 (1): 621-630.

[15] Yu Z, Li L, Yuan Y. A modified multivariate spectral gradient algorithm for solving absolute value equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2021: 107-461.

[16] Amini K, Kamandi A. A new line search strategy for finding separating hyperplane in projection-based methods[J]. Numerical Algorithms, 2015,70(3): 559-570.

[17] Rohn J. A theorem of the alternatives for the equation Ax+B|x|=b[J].Linear Multilinear Algebra,2004,52(6):421-426.

[18] Wang A , Wang H ,Deng Y. Interval algorithm for absolute value equations[J]. Cent. Eur. J. Math.,2011,9: 1171-1184.

[19] Noor M A, Iqbal J, Noor K I, et al. On an iterative method for solving absolute value equations[J]. Optim. Lett.,2012, 6: 1027-1033.

[20] Yu Z, Sun J, Qin Y. A multivariate spectral projected gradient method for bound constrained optimization[J]. Comput.Appl. Math. 2011, 235(8): 2263-2269.

[21] Yu G, Niu S, Ma J. Multivariate spectral gradient projection method for nonlinear monotone equations with convex constraints[J].Ind.Manag.Optim.,2013,9(1): 117-129.