

具有双 Allee 效应的时滞扩散捕食-食饵模型的时空动力学

练清清¹, 裴鑫萍¹, 陈云珊¹, 蒙伟明², 梁 盛², *汤小松¹

(1. 井冈山大学数理学院, 江西, 吉安 343009; 2. 井冈山大学电子与信息工程学院, 江西, 吉安 343009)

摘 要: 研究了一类具有双 Allee 效应的时滞扩散捕食-食饵模型。以 Allee 阈值和时滞为分支参数, 利用特征方程和分析技巧讨论了该模型正平衡点的稳定性、扩散诱发的 Turing 不稳定和时滞诱发的 Hopf 分支问题。最后, 通过数值模拟, 获得了该模型的空间周期解和时空斑图, 并验证了所得结果的正确性。

关键词: 捕食-食饵模型; 双 Allee 效应; 周期解; 时空斑图

中图分类号: O175.26

文献标志码: A

DOI:10.3669/j.issn.1674-8085.2021.06.001

SPATIOTEMPORAL DYNAMICS OF A DELAYED DIFFUSIVE PREDATOR-PREY MODEL WITH DOUBLE ALLEE EFFECT

LIAN Qing-qing¹, PEI Xin-ping¹, CHEN Yun-shan¹, MENG Wei-ming², LIANG Sheng², *TANG Xiao-song¹

(1. School of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China)

Abstract: A delayed diffusive predator-prey model with double Allee effect was investigated in this paper. Allee threshold value and delay was chosen as bifurcation parameter, the stability of the positive equilibrium, Turing instability deduced by diffusion and the existence of Hopf bifurcation deduced by delay for this model were discussed by using the characteristic equation and mathematical analysis skills. At last, by performing numerical simulations, the spatial homogeneous periodic solution of this model was obtained, and the validity of theoretical results was illustrated.

Key words: predator-prey model; double Allee effect; periodic solutions; spatial patterns

捕食者和食饵之间的相互关系及其演化是生态学和生物数学中的重要研究课题, 这引起了生物和数学领域中许多学者的极大兴趣。为了刻画捕食者和食饵之间的交互作用及其演化, Lotka^[1]和 Volterra^[2]率先利用微分方程来建立种群间相互作

用的数学模型。此后, 许多捕食-食饵系统被提出来并获得了大量有意义的研究成果。1931 年, 美国动物学家 Allee 提出了 Allee 效应, 即群居有益于种群的生长和存活, 但是种群过于稀疏或拥挤都会阻碍其生长, 并对繁殖产生副作用, 每个物种都有最适

收稿日期: 2021-07-17; 修改日期: 2021-09-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(11761038); 江西省教育厅科技计划项目(GJJ180583); 江西省大学生创新创业训练计划项目(S202010419044); 2019 年井冈山大学校级大学生创新创业训练计划项目(2019-74)

作者简介: 练清清(1998-), 女, 河南商丘人, 井冈山大学数理学院数学与应用数学专业 2018 级本科生(E-mail:2993959309@qq.com);

裴鑫萍(1999-), 女, 江西丰城人, 井冈山大学数理学院数学与应用数学专业 2018 级本科生(E-mail:1983476687@qq.com);

陈云珊(2000-), 女, 江西赣州人, 井冈山大学数理学院数学与应用数学专业 2018 级本科生(E-mail:2196429188@qq.com);

蒙伟明(2000-), 男, 江西于都人, 井冈山大学电子信息工程学院计算机科学与技术专业 2018 级本科生(E-mail:2715625534@qq.com);

梁 盛(2000-), 男, 江西兴国, 井冈山大学电子信息工程学院计算机科学与技术专业 2018 级本科生(E-mail:2838532805@qq.com);

*汤小松(1975-), 男, 江西永新人, 男, 副教授, 博士, 主要从事微分方程和动力系统研究(E-mail: tangxs40@sina.com).

宜生长的密度^[3]。由于 Allee 效应对种群动力学有潜在的影响, 近年来得到了众多学者的青睐^[4-10]。然而, 需要指出的是以往的文献只考虑了食饵的 Allee 效应, 而捕食者的 Allee 效应没有得到考虑。此外, 对各种生物种群这样一个群体仅考虑时间是不够的, 由于大多数生物种群分别活动在某个空间范围, 理应考虑空间的影响。基于以上分析, 我们在经典的 Lotka-Volterra 模型基础之上引入 Allee 效应和二次死亡率, 提出如下时滞扩散捕食-食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \varepsilon u(t, \vec{r}) \left(1 - \frac{u(t - \tau, \vec{r})}{K}\right) (u(t, \vec{r}) - a) - bu(t, \vec{r})v(t, \vec{r}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + bcu(t, \vec{r})v(t, \vec{r}) \frac{v(t, \vec{r})}{v(t, \vec{r}) + e} - dv^2(t, \vec{r}), \end{cases}$$

这里, u 和 v 分别表示食饵和捕食者的密度, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维 Laplace 算子, d_1 和 d_2 分别为食饵和捕食者的扩散速率, 时滞 τ 表示食饵成熟期, ε 是食饵的自然增长率, K 为环境容纳量, a , e 分别食饵和捕食者的 Allee 效应阈值, b 表示捕食者对食饵的搜捕有效率, c 为转化率, d 为二次死亡率系数。为方便讨论起见, 令 $u = K\tilde{u}$, $v = K\varepsilon\tilde{v}$, $\tilde{t} = K\varepsilon t$, $\tilde{x} = \sqrt{\varepsilon}Kx$, $\tilde{y} = \sqrt{\varepsilon}Ky$, $d_1 = \tilde{d}_1$, $d_2 = \varepsilon\tilde{d}_2$, $\alpha = \frac{a}{K}$, $\beta = \frac{bc}{\varepsilon}$, $\gamma = \frac{be}{K\varepsilon}$, $\delta = \frac{d}{b}$, 对上面模型作无量纲化处理并略去符号“ $\sim$ ”, 可得如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(t, \vec{r}) \left(1 - \frac{u(t - \tau, \vec{r})}{K}\right) (u(t, \vec{r}) - \alpha) - u(t, \vec{r})v(t, \vec{r}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v^2(t, \vec{r}) \left(\frac{\beta u(t, \vec{r})}{v(t, \vec{r}) + \gamma} - \delta\right), \end{cases} \quad (1)$$

其满足如下 Neumann 边界条件和初始条件:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \vec{r} = (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &> 0, \quad v(0, x, y) > 0, \\ \vec{r} = (x, y) &\in \Omega = [0, L] \times [0, L]. \end{aligned} \quad (3)$$

本研究将利用特征方程和分析技巧讨论了模型(1)-(3)正平衡点的稳定性、扩散诱发的 Turing 不稳定^[11-12]和时滞诱发的 Hopf 分支问题, 从而获得该模型的时空动力学行为。

本模型的结构如下: 在第 1 节中, 讨论了模型(1)平衡点的存在性, 并研究其稳定性以及扩散诱发

的 Turing 不稳定和时滞诱发的 Hopf 分支问题。在第 2 节中, 通过数值模拟, 获得了该系统的空间周期解和时空斑图并验证了所得结果的正确性。最后, 我们对本研究作了简要讨论。

1 平衡点和稳定性分析

在本节, 我们研究模型(1)平衡点的存在性和稳定性。由模型(1)和生物意义易知, 它有两个边界平衡点 $(1, 0)$, $(\alpha, 0)$ 和正平衡点 (u^*, v^*) 。接下来, 我们分四种情形讨论模型(1)正平衡点 (u^*, v^*) 的存在

性, 而 $u^* = \frac{\delta}{\beta}(v^* + \gamma)$, v^* 满足下面方程:

$$Av^2 + Bv + C = 0,$$

其中 $A = \delta^2$, $B = 2\gamma\delta^2 + \beta^2 - \beta\delta - \alpha\beta\delta$,

$$C = \gamma^2\delta^2 + \alpha\beta^2 - \beta\gamma\delta - \alpha\beta\gamma\delta.$$

情形 1: $C = 0$ 且 $B < 0$, 模型(1)只有一个正平衡点 (u^*, v^*) ;

情形 2: $C > 0$, 模型(1)只有一个正平衡点 (u^*, v^*) ;

情形 3: $B < 0$, $C > 0$, $B^2 - 4AC = 0$, 模型(1)只有一个正平衡点 (u^*, v^*) ;

情形 4: $B < 0$, $C > 0$, $B^2 - 4AC > 0$, 模型(1)有两个正平衡点 (u_+^*, v_+^*) 和 (u_-^*, v_-^*) , 其中,

$$u_{\pm}^* = \frac{\delta}{\beta}(v_{\pm}^* + \gamma), \quad v_{\pm}^* = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

我们仅对情形 4 的正平衡点进行稳定性分析, 其它三种情形也可类似讨论。

1) $\tau = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$

在平衡点 $(\tilde{u}, \tilde{v})$, 对模型(1)进行线性化, 可得

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v, \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v, \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$a_{11} = \tilde{u}(1 + \alpha - 2\tilde{u}), \quad a_{12} = -\tilde{u},$$

$$a_{21} = \frac{\beta\tilde{v}^2}{\tilde{v} + \gamma}, \quad a_{22} = -\frac{\beta\tilde{u}\tilde{v}^2}{(\tilde{v} + \gamma)^2}.$$

设线性方程的解形式为 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, $(a, b)^T$

为待定的列向量, 则对应于(4)的特征方程为

$$\lambda^2 - \Gamma_0 \lambda + D_0 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

当 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_*, v_*)$ 时, 则

$$D_0 = -\frac{u_*^*(v_*)^2}{\beta(v_*^* + \gamma)} \sqrt{B^2 - 4AC} < 0$$

由此可知, 模型(1)的正平衡点 (u_*, v_*) 总是不稳定的;

当 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_+, v_+)$ 时, 则

$$D_0 = \frac{u_+^*(v_+)^2}{\beta(v_+^* + \gamma)} \sqrt{B^2 - 4AC} > 0$$

如果 $\Gamma_0 < 0$, 则模型(1)的正平衡点 (u_*, v_*) 是渐近稳定的; 如果 $\Gamma_0 > 0$, 则模型(1)的正平衡点 (u_*, v_*) 是不稳定的。

2) $\tau = 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$

在平衡点 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_*, v_*)$, 对模型(1)进行线性化, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + a_{11}u + a_{12}v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + a_{21}u + a_{22}v. \end{cases} \quad (5)$$

设线性化方程(5)的解形式为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_*^* \\ v_*^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{(\lambda t + i(\vec{k} \cdot \vec{r}))},$$

其中, $\vec{k} = (k_x, k_y)$ 和 $k = |\vec{k}|$ 均为波数, i 是虚数单位, 则对应于线性化方程(5)的特征方程为

$$\lambda^2 - \Gamma_k \lambda + D_k = 0,$$

其中, $\Gamma_k = \Gamma_0 - k^2(d_1 + d_2)$,

$$D_k = d_1 d_2 k^4 - (d_1 a_{22} + d_2 a_{11})k^2 + D_0.$$

如果 $\Gamma_0 < 0$, 则对所有 $k \geq 0$, 有 $\Gamma_k < 0$ 。为使得模型(1)发生 Turing 不稳定, 则只要存在某个 $k > 0$ 使得 $D_k < 0$ 。为此, 可得 Turing 不稳定发生的必要条件为:

$$d_1 a_{22} + d_2 a_{11} > 0 \text{ 和 } (d_1 a_{22} + d_2 a_{11})^2 - 4d_1 d_2 D_0 > 0$$

此时波数 $k_c^2 = \sqrt{\frac{D_0}{d_1 d_2}}$ 。

3) $\tau \neq 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$

在平衡点 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_*, v_*)$, 对模型(1)进行线性化, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + a_{11}u + a_{112}u_\tau + a_{12}v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + a_{21}u + a_{22}v, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $a_{111} = \tilde{u}(1 - \tilde{u})$ 和 $a_{112} = -\tilde{u}(\tilde{u} - \alpha)$ 。取 $\Omega = [0, \ell\pi]$, 并设线性化方程(6)的解形式为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_*^* \\ v_*^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} \cos \frac{kx}{\ell},$$

则对应于线性化方程(6)的特征方程为

$$\lambda^2 + \tilde{\Gamma}_k \lambda + \tilde{D}_k = 0, \quad (7)$$

其中,

$$\tilde{\Gamma}_k = (d_1 + d_2) \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} - a_{22} - a_{112} e^{-\lambda \tau},$$

$$\tilde{D}_k = d_1 d_2 \frac{k^4}{\ell^4} - (d_2 a_{111} + d_1 a_{22} + d_2 a_{112} e^{-\lambda \tau}) \frac{k^2}{\ell^2} +$$

$$a_{111} a_{22} - a_{12} a_{21} + a_{112} a_{22} e^{-\lambda \tau}$$

下面我们将讨论时滞诱发 Hopf 分支的存在性。为此, 假设 $\Gamma_0 < 0$, 则模型(1)的正平衡点 (u_*, v_*) 。令 $\lambda = i\omega$ 并代入特征方程(7), 则方程(7)可化为

$$-\omega^2 + [(d_1 + d_2) \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} - a_{22} - a_{112} e^{-i\omega \tau}] i\omega +$$

$$d_1 d_2 \frac{k^4}{\ell^4} - (d_2 a_{111} + d_1 a_{22} + d_2 a_{112} e^{-i\omega \tau}) \frac{k^2}{\ell^2} +$$

$$a_{111} a_{22} - a_{12} a_{21} + a_{112} a_{22} e^{-i\omega \tau} = 0. \quad (8)$$

对(8)式分离实部与虚部, 则(8)式可化为

$$-\omega^2 + d_1 d_2 \frac{k^4}{\ell^4} - (d_2 a_{111} + d_1 a_{22}) \frac{k^2}{\ell^2} + a_{111} a_{22} - a_{12} a_{21} =$$

$$a_{112} \omega \sin \omega \tau + (d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22}) \cos \omega \tau \quad (9)$$

$$[(d_1 + d_2) \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} - a_{22}] \omega = a_{112} \omega \cos \omega \tau -$$

$$(d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22}) \sin \omega \tau. \quad (10)$$

继而, 由(9)和(10)可得

$$\omega^4 + P_k \omega^2 + Q_k = 0 \quad (11)$$

其中

$$P_k = [(d_1 + d_2) \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} - a_{22}]^2 - 2[d_1 d_2 \frac{k^4}{\ell^4} -$$

$$(d_2 a_{111} + d_1 a_{22}) \frac{k^2}{\ell^2} + a_{111} a_{22} - a_{12} a_{21}] - a_{112}^2,$$

$$Q_k = [d_1 d_2 \frac{k^4}{\ell^4} - (d_2 a_{111} + d_1 a_{22}) \frac{k^2}{\ell^2} + a_{111} a_{22} - a_{12} a_{21}]^2 - [d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22}]^2.$$

根据一元二次方程解的判定, 容易得如下结果:

(i) 当 $P_k^2 - 4Q_k < 0$ 或 $P_k > 0$, $Q_k > 0$ 或 $P_k^2 - 4Q_k = 0$, $P_k > 0$ 时, 则方程(11)没有解;

(ii) 当 $Q_k < 0$ 或 $P_k^2 - 4Q_k = 0$, $P_k < 0$ 时, 则方

$$\text{程(11)有惟一解 } \omega_k = \sqrt{\frac{-P_k + \sqrt{P_k^2 - 4Q_k}}{2}};$$

(iii) 当 $P_k^2 - 4Q_k > 0$, $P_k < 0$, $Q_k > 0$ 时, 则

$$\text{方程(11)有两个解 } \omega_k^\pm = \sqrt{\frac{-P_k \pm \sqrt{P_k^2 - 4Q_k}}{2}}.$$

定义如下集合 $\Sigma = \{m \in N_0 \mid \text{当 } k = m \text{ 时, 方程(11)有正解 } \omega\}$, 则当 $\tau = \tau_{kj}$ 时, 特征方程(7)有纯虚根 $\pm i\omega_k$; 当 $\tau = \tau_{kj}^+$ 时, 特征方程(7)有纯虚根 $\pm i\omega_k^+$; 当 $\tau = \tau_{kj}^-$ 时, 特征方程(7)有纯虚根 $\pm i\omega_k^-$, 其中

$$\tau_{kj} = \tau_{k0} + \frac{2j\pi}{\omega_k},$$

$$\tau_{k0} = \frac{1}{\omega_k} \arccos \frac{\mu(d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22}) + \nu a_{112} \omega_k}{(d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22})^2 + a_{112}^2 \omega_k^2},$$

$$\tau_{kj}^\pm = \tau_{k0}^\pm + \frac{2j\pi}{\omega_k^\pm},$$

$$\tau_{k0}^\pm = \frac{1}{\omega_k^\pm} \arccos \frac{\mu(d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22}) + \nu a_{112} \omega_k^\pm}{(d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{112} a_{22})^2 + a_{112}^2 \omega_k^{\pm 2}},$$

$$\mu = -\omega^2 + d_1 d_2 \frac{k^4}{\ell^4} - (d_2 a_{111} + d_1 a_{22}) \frac{k^2}{\ell^2} + a_{111} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\nu = [(d_1 + d_2) \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} - a_{22}] \omega.$$

接下来验证横截条件成立。为此, 方程(7)两端对 τ 求导, 可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{(2\lambda + \tilde{\Gamma})e^{\lambda\tau}}{a_{112}\lambda^2 - (d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} a_{22})\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

继而,

$$[\text{Re}(\frac{d\lambda}{d\tau})^{-1}]_{\tau=\tilde{\tau}} =$$

$$\text{Re}[-\frac{(2\lambda + \tilde{\Gamma})e^{\lambda\tau}}{a_{112}\lambda^2 - (d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} a_{22})\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}]_{\tau=\tilde{\tau}} =$$

$$[\frac{2\omega^2 + P_k}{a_{112}^2 \omega^2 + (d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} a_{22})^2}]_{\tau=\tilde{\tau}} =$$

$$\pm [\frac{\sqrt{P_k^2 - 4Q_k}}{a_{112}^2 \omega^2 + (d_2 a_{112} \frac{k^2}{\ell^2} - a_{111} a_{22})^2}]_{\tau=\tilde{\tau}}.$$

从而可得, $[\text{Re}(\frac{d\lambda}{d\tau})]_{\tau=\tau_{kj}} \geq 0$, $[\text{Re}(\frac{d\lambda}{d\tau})]_{\tau=\tau_{kj}^+} > 0$ 和 $[\text{Re}(\frac{d\lambda}{d\tau})]_{\tau=\tau_{kj}^-} < 0$ 。

显然, 对于 $j \in N$, 有 $\tau_{k0} < \tau_{kj}$, $\tau_{k0}^\pm < \tau_{kj}^\pm$ 。从

而, 对于 $k \in \Sigma$, 定义 $\tau^* = \min\{\tau_{k0}, \tau_{k0}^\pm\}$ 。于是, 可得如下结论:

当 $\Sigma = \emptyset$ 时, 模型(1)的正平衡点 (u_+, v_+) 对于一切 $\tau \geq 0$ 总是局部渐近稳定的; 当 $\Sigma \neq \emptyset$ 时, 模型(1)的正平衡点 (u_+, v_+) 当 $\tau \in [0, \tau^*]$ 时是局部渐近稳定的, 当 $\tau > \tau^*$ 时是不稳定的; 当 $\Sigma \neq \emptyset$ 时, 模型(1)当 $\tau = \tau_{kj}$ 或 τ_{kj}^- 或 τ_{kj}^+ ($k \in \Sigma$, $j \in N_0$) 时在正平衡点 (u_+, v_+) 处发生 Hopf 分支, 且分支出空间齐次周期解 ($k = 0$) 或空间非齐次周期解 ($k > 0$)。

2 数值计算与模拟

在本小节, 我们将利用 MATLAB 软件对模型(1)进行数值计算与模拟, 以验证本次结果的正确性。

1) $\tau = 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$

在时空斑图的模拟过程中, 我们发现有多种不同的动力学行为, 并且食饵 u 与捕食者 v 分布的变化是一致的, 因此, 我们把斑图形成的分析限定到研究一个种群的分布上。本研究仅展示食饵种群 u 的分布情况。为了考察 Allee 效应对模型(1)的 Turing 斑图的影响, 我们选取参数值为 $d_1 = 0.01$, $d_2 = 2$,

$\beta = 3$, $\delta = 1$ 和 $L = 200$ 并且画出分支图, 见图 1。从图 1 可以看出 Turing 区域位于曲线 W: $B = 0$ 下方、曲线 U: $B^2 - 4AC = 0$ 上方以及 Hopf 分支线 H 与 Turing 分支线 L 之间, 其余为边界曲线。在 Turing 区域中, 选定 $\gamma = 2$ 后, 分别取 $\alpha = 6.5$, $\alpha = 6.9$, $\alpha = 7.2$ 进行模拟, 得到了相应的时空斑图, 具体见图 2。接着, 选定 $\alpha = 7$ 后, 分别取 $\gamma = 1$, $\gamma = 1.75$, $\gamma = 2.35$ 进行模拟, 也得到了相应的时空斑图, 具体见图 3。

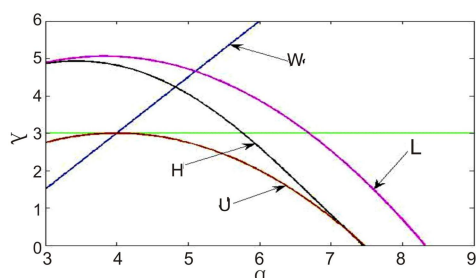
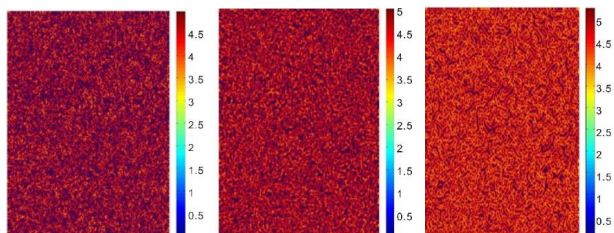


图 1 模型(1)的分支图

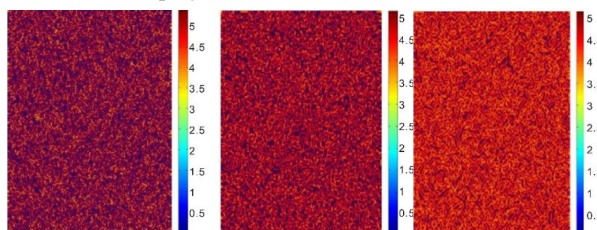
Fig. 1 The bifurcation diagram of model (1)



左图: $\alpha = 6.5$, 中图: $\alpha = 6.9$, 右图: $\alpha = 7.2$

图 2 食饵在 $t = 25000$ 时的时空斑图

Fig. 2 Snapshots of contour pictures of the time evolution of prey at the moment of $t=25000$



左图: $\gamma = 1$, 中图: $\gamma = 1.75$, 右图: $\gamma = 2.35$

图 3 食饵在 $t = 25000$ 时的时空斑图

Fig. 3 Snapshots of contour pictures of the time evolution of prey at the moment of $t=25000$,

2) $\tau \neq 0$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$

为了模拟时滞对模型(1)动力学的影响, 令 $\delta = \beta\sigma$, 并选定 $d_1 = 0.01$, $d_2 = 2$, $\alpha = 0.02$, $\gamma = 0.1$, $\sigma = 1$, $L = \pi$ 和初始条件为 $u(0, x) = 0.4930$, $v(0, x) = 0.3930$ 。当 $\tau = 0$ 时, 以 β 为参数并直接计算, 可得模型(1)的正平衡点 $(u^*, v^*) = (0.2930, 0.1930)$, 且当 $\beta > \beta_H = 1.0008$ 时, 模型(1)的正平衡点是局部渐近稳定的, 而当 $\beta < \beta_H = 1.0008$ 时, 模型(1)的正平衡点 (u^*, v^*) 是

不稳定的。这意味着当 $\beta = \beta_H$ 时, 模型(1)在正平衡点 (u^*, v^*) 邻近发生 Hopf 分支并分支出稳定的空间齐次周期解, 具体见图 4 和图 5。

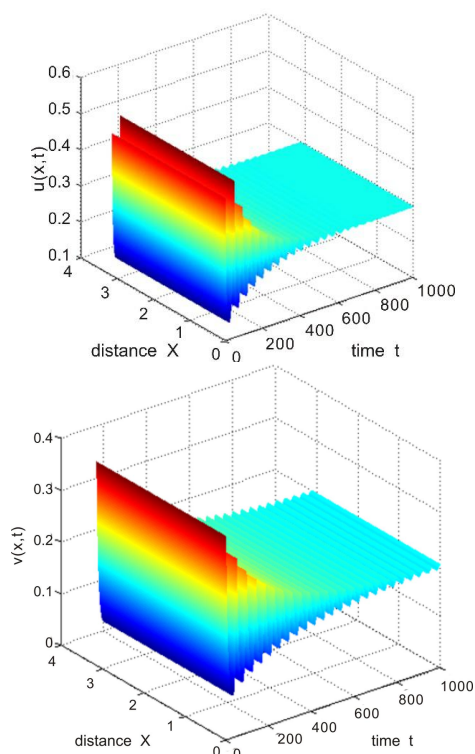


图 4 $\beta = 1.1 > \beta_H = 1.0008$ 时, 正平衡点

$(u^*, v^*) = (0.2930, 0.1930)$ 的局部渐近稳定性

Fig.4 The locally asymptotical stability of positive equilibrium

$(u^*, v^*) = (0.2930, 0.1930)$ with $\beta = 1.1 > \beta_H = 1.0008$.

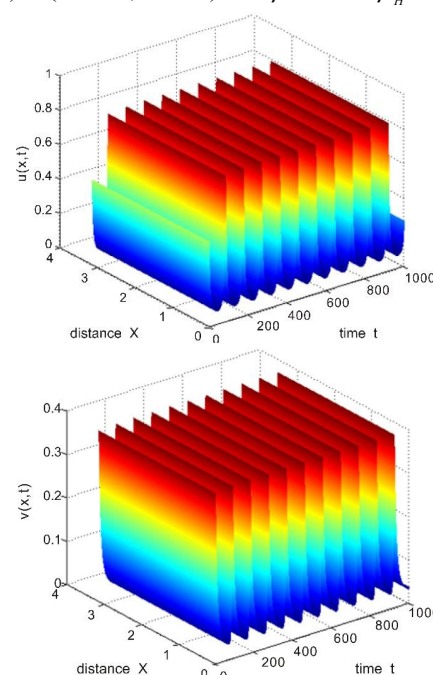


图 5 $\beta = 0.9 < \beta_H = 1.0008$ 时, 稳定的空间周期解

Fig. 5 The stable spatial periodic solutions with $\beta = 0.9 < \beta_H = 1.0008$.

接下来, 继续考虑 $\tau \neq 0$ 的情形。经计算, 可得 $\Sigma = \{0\}$, $P_k = -0.0259 < 0$, $Q_k = 1.9014 \times 10^{-5} > 0$ 。从而有, $\omega_0^+ = 0.1585$, $\omega_0^- = 0.0275$ 。继而可得 $\tau_0^+ = 1.0426$, $\tau_0^- = 101.2284$ 。由此可得, $\tau^* = \min\{\tau_0^+, \tau_0^-\} = 1.0426$ 。当 $\tau < \tau^* = 1.0426$ 时模型(1)的正平衡点是局部渐近稳定的, 而当 $\tau > \tau^* = 1.0426$ 时模型(1)的正平衡点 (u^*, v^*) 是不稳定的。这意味着当 $\tau = \tau^* = 1.0426$ 时, 模型(1)在正平衡点 (u^*, v^*) 邻近发生 Hopf 分支并分支出稳定的空间齐次周期解, 具体见图 6 和图 7。

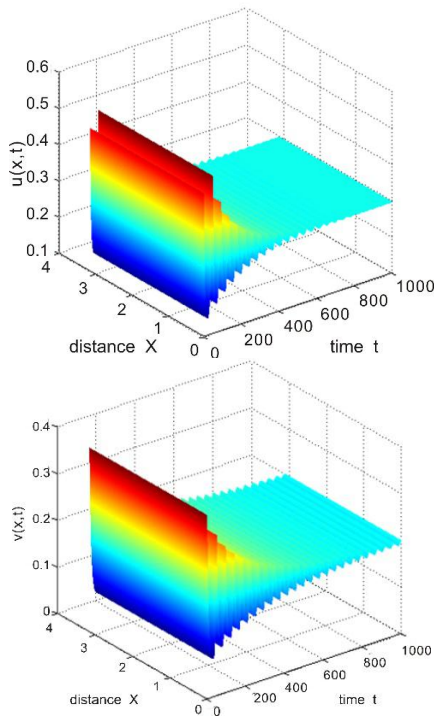


图 6 $\tau = 0.5 < \tau^* = 1.0426$ 时, $(u^*, v^*) = (0.2930, 0.1930)$ 的局部渐近稳定性

Fig. 6 The locally asymptotical stability of positive equilibrium $(u^*, v^*) = (0.2930, 0.1930)$

with $\tau = 0.5 < \tau^* = 1.0426$.

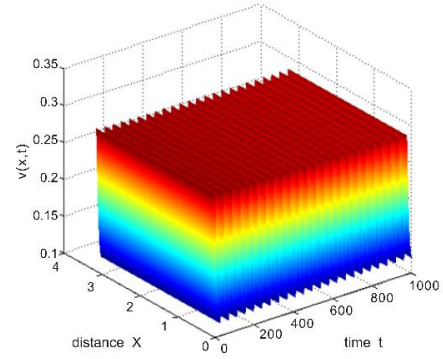
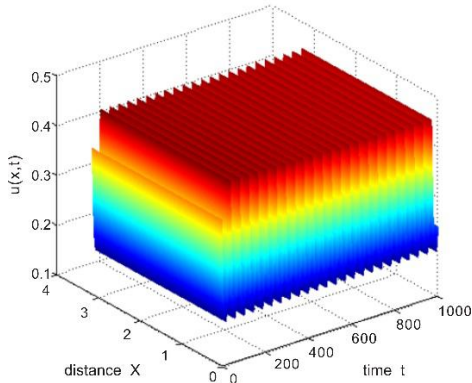


图 7 $\tau = 1.1 > \tau^* = 1.0426$ 时, 稳定的空间周期解

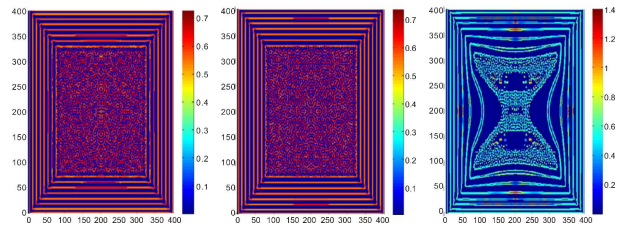
Fig. 7 The stable spatial periodic solutions with

$\tau = 1.1 > \tau^* = 1.0426$

最后, 我们对二维空间变量情形进行数值模拟。情形(1)选取初始条件为

$$\begin{cases} u(0, x, y) = 0.2930 - 1 \times 10^{-6}(x-100)(x-300), \\ v(0, x, y) = 0.1930 - 1 \times 10^{-6}(y-100)(y-300), \end{cases}$$

且时滞 τ 分别取 0.5, 1.1, 2.5 时, 当演化时间为 500 和 $L=200$, 得到了稳定的时空斑图, 且随着时间的变化不再发生改变, 具体见图 8。



左图: $\tau = 0.5$, 中图: $\tau = 1.1$, 右图: $\tau = 2.5$

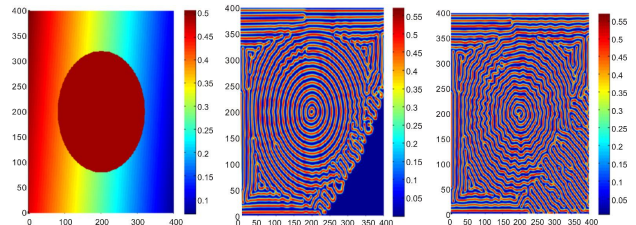
图 8 演化时间为 500 的时空斑图

Fig. 8 Snapshots of contour pictures of the time evolution of prey at the moment of $t=500$.

情形(2) 选取初始条件为

$$\begin{cases} u(0, x, y) = 0.4930, (x-200)^2 + (y-200)^2 < 14400, \\ v(0, x, y) = 0.3930, (x-200)^2 + (y-200)^2 < 14400, \\ u(0, x, y) = v(0, x, y) = 0, \text{其它}, \end{cases}$$

且时滞 τ 取 1.1 时, 获得了随时间演化的时空斑图, 具体见图 9。



左图: $t = 0$, 中图: $t = 1000$, 右图: $t = 5000$

图 9 选取 $\tau = 1.1$ 时的时空斑图

Fig. 9 Snapshots of contour pictures of prey as choosing $\tau = 1.1$.

3 结语

本研究了一类具有双 Allee 效应的时滞扩散捕食-食饵模型,并讨论了该模型正平衡点的稳定性以及扩散诱发的 Turing 不稳定和时滞诱发的 Hopf 分支问题。通过数值模拟,获得了模型(1)丰富的动力学结果,即: 1) Allee 阈值变化下的 Turing 斑图; 2) 参数 β 和时滞变化下的空间齐次周期解; 3) 时滞变化下的时空斑图。这是 Allee 效应、系统参数、扩散和时滞等多因素交互作用下的结果。

参考文献:

- [1] Lotka A J. Sui tentative di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali[J]. Ann. Radioelectr. Univ. Romandes, 1901, 2: 3-28.
- [2] Volterra V. Variazione e fluttuazioni del numero d' individui in specie animali conviventi[J]. Mem. R. Accad. Naz. Dei Lincei, 1926, 2: 31-113.
- [3] Allee W C. Animal aggregations: a study in general sociology[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1931.
- [4] Cui R H, Shi J P, Wu B Y. Strong Allee effect in a diffusive predator-prey system with a protection zone[J]. Journal of Differential Equations, 2014, 256(1): 108-129.
- [5] Wang X C, Wei J J. Dynamics in a diffusive predator-prey system with strong Allee effect and Ivlev-type functional response[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 422 (2): 1447-1462.
- [6] Zhang L M, Zou L. Bifurcations and control in a discrete predator-prey model with strong Allee effect[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(5): 1850062.
- [7] Michel Iskin da S C, Lucas dos A. Multiple hydra effect in a predator - prey model with Allee effect and mutual interference in the predator[J]. Ecological Modelling, 2018, 373: 22-24.
- [8] Tyutyunov Y V, Sen D, Titova L I, et al. Predator overcomes the Allee effect due to indirect prey-taxis[J]. Ecological Modelling, 2019, 39: 100772.
- [9] Zhang C H, Yuan H L. Pattern formation in a variable diffusion predator-prey model with additive Allee effect[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(7): 4023-4035.
- [10] Liu Y Y, Wei J J. Spatiotemporal dynamics of a modified Leslie-Gower model with weak Allee effect[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020, 30(12): 2050169.
- [11] Turing A L. The chemical basis of morphogenesis[J]. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B Biol. Sci., 1952, 237: 37-72.
- [12] 欧阳颀. 非线性科学与斑图动力学导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.