

具有二阶扰动和疫苗接种的随机霍乱传染病模型的平稳分布

*张艳敏, 王 丹, 刘明鼎

(青岛理工大学琴岛学院基础教学部, 山东, 青岛 266106)

摘 要: 针对一类具有二阶扰动和疫苗接种的随机霍乱传染病模型, 得到了一个关键条件 R_0^S 。然后利用随机 Lyapunov 分析法以及 Itô 公式, 证明了当 $R_0^S > 1$ 时, 随机霍乱传染病模型存在遍历平稳分布。因为模型具有二阶扰动, 在证明中构造了新颖的随机 Lyapunov 函数。证明方法可以应用到类似的模型中。

关键词: 随机霍乱传染病模型; 二阶扰动; 疫苗接种; 平稳分布; Lyapunov 函数

中图分类号: O211.63

文献标识码: A

DOI:10.3669/j.issn.1674-8085.2021.03.001

STATIONARY DISTRIBUTION OF A STOCHASTIC CHOLERA EPIDEMIC MODEL WITH SECOND-ORDER PERTURBATION AND VACCINATION

*ZHANG Yan-min, WANG Dan, LIU Ming-ding

(Qingdao University of Technology Qingdao College, Department of Basic Education, Qingdao, Shandong 266106, China)

Abstract: For a class of stochastic cholera epidemic model with second-order perturbation and vaccination, a key condition R_0^S was obtained. Then, by using stochastic Lyapunov analysis method and Itô formula, it was proved that the stochastic cholera epidemic model had a unique ergodic stationary distribution when $R_0^S > 1$. Because the model had second-order disturbance, the novel stochastic Lyapunov functions were constructed in the proof. The proof method can be applied to similar models.

Key words: stochastic cholera epidemic model; second-order perturbation; vaccination; stationary distribution; Lyapunov function

0 引言

霍乱是一种由霍乱弧菌引起的急性腹泻性传染病^[1]。感染者会出现水样腹泻、呕吐和严重脱水, 如果不及时治疗, 数小时内就会死亡^[1]。据统计, 全世界每年有 130 万至 400 万人感染霍乱, 另有 2.1 万至 14.3 万人因霍乱死亡^[2]。疫苗作为控制传染病的有效手段, 已被广泛应用到研究霍乱传染的数学模型当中^[3-5]。近年来为了分析霍乱传染的动力学性质, 并为有效预防和控制霍乱的传播提供参考, 学者们给出了众多确定性霍乱数学模型^[6-10], 并对模

型的性质进行研究。在这些成果中, 有学者研究了模型的稳定性问题, 有学者研究了模型的最优控制问题, 还有学者研究了具有疫苗接种下的霍乱控制问题, 这些研究成果被广泛应用到实际问题解决当中。尤其在 2020 年全球爆发新型冠状病毒, 对传染病的有效控制研究吸引了学者们更广泛的关注。因此通过数学模型研究霍乱传染病的有效控制问题不仅具有理论意义, 更具有现实意义。

在文献[4]中, Xu 等提出了如下具有疫苗接种的霍乱传染病模型:

收稿日期: 2021-01-24; 修改日期: 2021-03-10

基金项目: 山东省高等教育研究项目(19GDJ019); 青岛理工大学琴岛学院重点研究项目(2020001A)

作者简介: *张艳敏(1981-), 女, 山东东营人, 副教授, 硕士, 主要从事微分方程理论研究(E-mail:zhym0628@163.com);

王 丹(1982-), 女, 山东青岛人, 副教授, 硕士, 主要从事微分方程理论研究(E-mail:253065193@qq.com);

刘明鼎(1982-), 男, 辽宁大连人, 教授, 主要从事生物数学模型研究(E-mail:lmd0313@163.com)。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \phi S - \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S + \eta V \\ \frac{dV(t)}{dt} = \phi S - \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - (\mu + \eta)V \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta SB}{K+B} + \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - (\mu + \gamma + d)I \\ \frac{dB(t)}{dt} = \xi I - \delta B \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中, $S(t)$, $V(t)$, $I(t)$, $R(t)$, 分别代表 t 时刻易感数、接种数、已感染数和恢复数, $B(t)$ 表示 t 时刻水中霍乱弧菌病毒的浓度。系数 $\Lambda, \phi, \beta, K, \mu, \eta, \sigma, \gamma, d, \xi, \delta$ 以及模型具体含义见文献[4]。由文献[4]知模型(1)具有无病平衡点 $E^0 = (S_0, V_0, 0, 0, 0) = (\frac{\Lambda(\mu + \eta)}{\mu(\mu + \eta + \phi)}, \frac{\Lambda\phi}{\mu(\mu + \eta + \phi)}, 0, 0, 0)$ 。其基本再生数 $R_0 = \frac{\Lambda\beta\xi(\mu + \eta + \sigma\phi)}{K\delta\mu(\mu + \eta)(\mu + \gamma + d)}$, 证明了当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E^0 是全局渐进稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E^0 是不稳定的。此时存在一个地方病平衡点 $E^*(S^*, V^*, I^*, B^*, R^*)$, 并且是全局渐进稳定的。

然而在现实中, 任何传染病模型都不可避免的受到环境噪声的干扰, 在模型中加入随机干扰是必要的, 且更符合实际情况。因此研究霍乱模型式(1)加入随机干扰项更能解决实际问题。近些年, 也有很多学者研究了随机传染病模型的动力学行为^[11-14]。在这些随机模型中, 多数研究的是具有线性干扰项。其中 ZHANG 等^[1]研究了系统式(1)的如下线性随机霍乱传染病模型:

$$\begin{cases} dS(t) = (\Lambda - \phi S - \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S + \eta V)dt + \sigma_1 S dB_1(t) \\ dV(t) = (\phi S - \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - (\mu + \eta)V)dt + \sigma_2 V dB_2(t) \\ dI(t) = (\frac{\beta SB}{K+B} + \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - (\mu + \gamma + d)I)dt + \sigma_3 I dB_3(t) \\ dB(t) = (\xi I - \delta B)dt + \sigma_4 B dB_4(t) \\ dR(t) = (\gamma I - \mu R)dt + \sigma_5 R dB_5(t) \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中 $\sigma_i (i=1,2,3,4,5)$ 为白噪声强度, $B_i(t) (i=1,2,3,4,5)$ 是相互独立的标准布朗运动, 其他参数意义同式(1)。文献[1]中, Zhang 等得出了如下两个结论:

引理 1^[1] 对任意的初始条件

$$(S(0), V(0), I(0), B(0), R(0)) \in \mathfrak{R}_+^5,$$

当 $t \geq 0$ 时, 系统式(2)有唯一正解

$$(S(t), V(t), I(t), B(t), R(t)) \in \mathfrak{R}_+^5,$$

并且满足 $P\{(S(t), V(t), I(t), B(t), R(t)) \in \mathfrak{R}_+^5 = 1$ 。

引理 2^[1] 对任意的初始条件

$$(S(0), V(0), I(0), B(0), R(0)) \in \mathfrak{R}_+^5,$$

当 $\mathfrak{R}_0^s > 1$ 时, 系统式(2)的解有唯一遍历平稳

分布。其中 $\mathfrak{R}_0^s$ 为模型式(2)存在平稳分布的关键值, 其具体表达式见文献[1]。

然而在现实状态中, 随机传染病模型的动力学行为会受到各种复杂噪声的干扰。受文献[14]的启发, 传染病模型受到非线性干扰比线性干扰更符合实际情况。然而具有二阶扰动的随机传染病模型的相关的研究成果相对较少, 因此本文将研究如下二阶扰动的随机霍乱传染病模型的平稳分布:

$$\begin{cases} dS(t) = (\Lambda - \phi S - \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S + \eta V)dt + S(\sigma_{11} + \sigma_{12}S)dB_1(t) \\ dV(t) = (\phi S - \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - (\mu + \eta)V)dt + V(\sigma_{21} + \sigma_{22}V)dB_2(t) \\ dI(t) = (\frac{\beta SB}{K+B} + \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - (\mu + \gamma + d)I)dt + I(\sigma_{31} + \sigma_{32}I)dB_3(t) \\ dB(t) = (\xi I - \delta B)dt + B(\sigma_{41} + \sigma_{42}B)dB_4(t) \\ dR(t) = (\gamma I - \mu R)dt + R(\sigma_{51} + \sigma_{52}R)dB_5(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\sigma_{ij} > 0 (i=1,2,3,4,5; j=1,2)$ 为白噪声强度, $B_j(t) (i=1,2,3,4,5)$ 为相互独立的标准布朗运动, 其它系数意义同式(1)。

正平衡态的稳定性是生物数学模型动力学性质的重要研究内容。然而, 大多数随机模型没有传统的正平衡态。因此, 随机生物数学模型的平稳分布(随机正平衡态)一直受到广泛关注。此外式(3)受到二阶白噪声的干扰, 这也增加了分析的难度。本文将致力于证明模型(3)平稳分布的存在性。

1 预备知识

引理 3 对任意的初始条件

$$(S(0), V(0), I(0), B(0), R(0)) \in \mathfrak{R}_+^5,$$

当 $t \geq 0$ 时, 系统式(3)有唯一正解

$$(S(t), V(t), I(t), B(t), R(t)) \in \mathfrak{R}_+^5,$$

并且满足 $P\{(S(t), V(t), I(t), B(t), R(t)) \in \mathfrak{R}_+^5 = 1$ 。

引理 3 的证明方法是标准的, 与文献[15]引理 1 的证明方法与过程几乎是一致的。这里省去证明过程。

引理 4

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2), (x \geq 0, y \geq 0).$$

设 $X(t)$ 为 d 维欧氏空间 E_d 上的齐次马尔科夫过程, 且满足 $dx(t) = b(x(t))dt + \sum_{r=1}^k f_r(x(t))dB_r(t)$ 。扩散矩阵为 $A(x) = (a_{ij}(x)), a_{ij}(x) = \sum_{r=1}^k f_r^i(x)f_r^j(x)$ 。

引理 5^[15] 设 $X(t)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上马尔科夫过程。如果存在有界开区域 $D \in \mathbb{R}^d$, Γ 为区域 D 的正则化边界, 并满足:

$$(C1) \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq M|\xi|, x \in D, \xi \in \mathbb{R}^d, M > 0$$

(C2) 存在二阶可微函数 W , 对所有的 $x \in \mathbb{R}^d \setminus D$ 有 $LW < 0$, 则马尔科夫过程 $X(t)$ 具有唯一遍历平稳分布 $\pi(s)$ 。这里 $\pi(s)$ 满足

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(x(t))dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\pi(dx)\right) = 1$$

其中 $g(x)$ 为可积函数。

为了清晰证明过程, 给出如下记号:

$$\mathbb{R}_+^5 = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R} : x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\bar{\sigma}_1 = \phi + \beta + \mu + \sigma_{11}^2, \bar{\sigma}_2 = \mu + \gamma + d + \sigma_{31}^2, \bar{\sigma}_3 = \delta + \sigma_{41}^2,$$

$$\varphi = K + \frac{2C_1\sigma_{12}\Lambda}{(1-p)\sigma_{11}} + \Lambda, R_0^S = \frac{\Lambda\beta\xi}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3\varphi}.$$

2 平稳分布

定义 1^[1] 对于 n 维随机微分方程

$$dX(t) = f(X(t), t)dt + g(X(t), t)dB(t), t \geq t_0,$$

具有初值 $X(0) = X_0$, $B(t)$ 是标准布朗运动。则关于解 $X(t)$ 的一个重要算子定义为:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n f_k(X(t), t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n [g^T(X(t), t)g(X(t), t)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

定理 1 对任意的初始条件

$$(S(0), V(0), I(0), B(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^5,$$

当 $R_0^S > 1$ 时, 系统式 (3) 的解有唯一遍历平稳分布。

证明 要证明定理 1 成立, 需要引理 5 的两个条件成立。条件 (C1) 的验证与文献 [15] 完全类似, 这里省略。下面主要验证条件 (C2)。首先定义如下 C^2 上随机 Lyapunov 函数:

1) $V_1 = -C_1 \ln S - C_2 \ln I - C_3 \ln B$, C_1, C_2, C_3 为常数, 后面会给出具体取值。

$$2) V_2 = \frac{2C_1}{p(1-p)\sigma_{11}^p} (\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^p + \frac{2C_3}{p(1-p)\sigma_{41}^p} (\sigma_{41} + \sigma_{42}S)^p + S + V + \frac{1}{\delta}B, (0 < p < 1).$$

$$3) V_3 = \frac{1}{k(1-k)} [(\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^k + (\sigma_{21} + \sigma_{22}V)^k + (\sigma_{31} + \sigma_{32}I)^k + (\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^k + (\sigma_{51} + \sigma_{52}R)^k], (0 < k < 1).$$

$$4) V_4 = -\ln S - \ln V - \ln B - \ln R.$$

5) $V = M(V_1 + V_2) + V_3 + V_4$, M 为常数, 具体含义将在后面给出。

第一步对 V_1 使用 Itô 公式^[16]得:

$$\begin{aligned} LV_1 = & -\frac{C_1}{S}(\Lambda - \phi S - \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S + \eta V) + \\ & \frac{C_1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^2 - \frac{C_2}{I}(-\frac{\beta SB}{K+B} + \frac{\sigma \beta VB}{K+B} - \\ & (\mu + \gamma + d)I) + \frac{C_2}{2}(\sigma_{31} + \sigma_{32}I)^2 - \\ & \frac{C_3}{B}(\xi I + \delta B) + \frac{C_3}{2}(\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^2 - \\ & (K+B) + (K+B) \leq \\ & -4\sqrt{C_1 C_2 C_3 \Lambda \beta \xi} + C_1(\phi + \beta + \mu + \sigma_{11}^2) + \\ & C_1 \sigma_{12}^2 S^2 + C_2(\mu + \gamma + d + \sigma_{31}^2) + C_2 \sigma_{32}^2 I^2 + \\ & C_3(\delta + \sigma_{41}^2) + C_3 \sigma_{42}^2 B^2 + (K+B) = \\ & -4\sqrt{C_1 C_2 C_3 \Lambda \beta \xi} + C_1 \bar{\sigma}_1 + C_2 \bar{\sigma}_2 + C_3 \bar{\sigma}_3 + \\ & C_1 \sigma_{12}^2 S^2 + C_2 \sigma_{32}^2 I^2 + C_3 \sigma_{42}^2 B^2 + K+B \end{aligned}$$

取

$$C_1 = \frac{\Lambda \beta \xi}{\bar{\sigma}_1^2 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3}, C_2 = \frac{\Lambda \beta \xi}{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2^2 \bar{\sigma}_3}, C_3 = \frac{\Lambda \beta \xi}{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3^2},$$

则可以得到

$$LV_1 \leq -\frac{\Lambda\beta\xi}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3} + K + C_1\sigma_{12}^2S^2 + C_2\sigma_{32}^2I^2 + C_3\sigma_{42}^2B^2 + B。$$

第二步对 V_2 使用 Itô 公式得:

$$\begin{aligned} LV_2 = & -\frac{2C_1\sigma_{12}}{(1-p)\sigma_{11}^p} + (\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^{p-1}(\Lambda - \phi S - \\ & \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S + \eta V) - \frac{C_1\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^p} S^2 (\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^p + \\ & \frac{2C_3\sigma_{42}}{(1-p)\sigma_{41}^p} (\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^{p-1} (\xi I - \delta B) - \\ & \frac{C_3\sigma_{42}^2}{\sigma_{41}^p} B^2 (\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^p + \Lambda - \\ & \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S - \frac{\sigma\beta VB}{K+B} - \mu A + \frac{\xi}{\delta} I - B \leq \\ & \frac{2C_1\sigma_{12}\Lambda}{(1-p)\sigma_{11}} + \frac{2C_1\sigma_{12}}{(1-p)\sigma_{11}} \eta V - C_1\sigma_{12}^2S^2 + \\ & \frac{2C_3\sigma_{42}\xi}{(1-p)\sigma_{41}} I - C_3\sigma_{42}^2B^2 + \Lambda - \mu A + \frac{\xi}{\delta} I - B。 \end{aligned}$$

当 $\frac{2C_1\sigma_{12}\eta}{(1-p)\sigma_{11}} < \mu$ 成立时可以得到:

$$\begin{aligned} L(V_1 + V_2) \leq & -\frac{\Lambda\beta\xi}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3} + \left(K + \frac{2C_1\sigma_{12}\Lambda}{(1-p)\sigma_{11}} + \Lambda \right) + \\ & \left(\frac{2C_1\sigma_{12}\eta}{(1-p)\sigma_{11}} - \mu \right) V + C_2\sigma_{32}^2I^2 + \left(\frac{2C_3\sigma_{42}\xi}{(1-p)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) I \leq \\ & -\left(K + \frac{2C_1\sigma_{12}\Lambda}{(1-p)\sigma_{11}} + \Lambda \right) \left(\frac{\Lambda\beta\xi}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3\phi} - 1 \right) + \\ & C_2\sigma_{32}^2I^2 + \left(\frac{2C_3\sigma_{42}\xi}{(1-p)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) I = \\ & -\varphi(R_0^s - 1) + C_2\sigma_{32}^2I^2 + \left(\frac{2C_3\sigma_{42}\xi}{(1-p)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) I。 \end{aligned}$$

第三步对 V_3 使用 Itô 公式得:

$$\begin{aligned} LV_3 = & \frac{\sigma_{12}}{1-k} (\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^{k-1} (\Lambda - \phi S - \\ & \frac{\beta SB}{K+B} - \mu S + \eta V) + \frac{\sigma_{12}^2}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^k S^2 + \\ & \frac{\sigma_{22}}{1-k} (\sigma_{21} + \sigma_{22}V)^{k-1} \left(\phi S - \frac{\sigma\beta VB}{K+B} - (\mu + \eta)V \right) - \\ & \frac{\sigma_{22}^2}{2} (\sigma_{21} + \sigma_{22}V)^k V^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{32}}{1-k} (\sigma_{31} + \sigma_{22}I)^{k-1} \left(\frac{\beta SB}{K+B} + \frac{\sigma\beta VB}{K+B} \right) - \\ & (\mu + \gamma + d)I - \frac{\sigma_{32}^2}{2} (\sigma_{31} + \sigma_{32}I)^k I^2 + \\ & \frac{\sigma_{42}}{1-k} (\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^{k-1} (\xi I - \delta B) - \\ & \frac{\sigma_{42}^2}{2} (\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^k B^2 + \\ & \frac{\sigma_{52}}{1-k} (\sigma_{51} + \sigma_{52}B)^{k-1} (\gamma I - \mu R) - \\ & \frac{\sigma_{52}^2}{2} (\sigma_{51} + \sigma_{52}R)^k R^2 \leq \\ & \frac{\sigma_{12}\sigma_{11}^{k-1}}{1-k} (\Lambda + \eta V) - \frac{\sigma_{12}^{k+2}}{2} + \frac{\sigma_{22}\sigma_{21}^{k-1}}{1-k} \phi S - \\ & \frac{\sigma_{22}^{k+2}}{2} V^{k+2} + \frac{\sigma_{32}\sigma_{31}^{k-1}}{1-k} (\beta S + \sigma\beta V) - \frac{\sigma_{32}^{k+2}}{2} I^{k+2} - \\ & \frac{\sigma_{42}\sigma_{41}^{k-1}}{1-k} \xi I - \frac{\sigma_{42}^{k+2}}{2} B + \frac{\sigma_{52}\sigma_{51}^{k-1}}{1-k} \gamma I - \frac{\sigma_{52}^{k+2}}{2} R^{k+2} = \\ & -\frac{\sigma_{12}^{k+2}}{2} S^{k+2} + \left(\frac{\sigma_{22}\sigma_{21}^{k-1}}{1-k} \phi + \frac{\sigma_{32}\sigma_{31}^{k-1}}{1-k} \beta \right) S - \\ & \frac{\sigma_{22}^{k+2}}{2} V^{k+2} + \left(\frac{\sigma_{12}\sigma_{11}^{k-1}}{1-k} \eta + \frac{\sigma_{32}\sigma_{31}^{k-1}\sigma\beta}{1-k} \right) V - \\ & \frac{\sigma_{32}^{k+2}}{2} I^{k+2} + \left(\frac{\sigma_{42}\sigma_{41}^{k-1}\xi}{1-k} + \frac{\sigma_{52}\sigma_{51}^{k-1}\gamma}{1-k} \right) I - \\ & \frac{\sigma_{42}^{k+2}}{2} B^{k+2} - \frac{\sigma_{52}^{k+2}}{2} R^{k+2} + \frac{\sigma_{12}\sigma_{11}^{k-1}}{1-k} \Lambda = \\ & -\frac{\sigma_{12}^{k+2}}{2} B^{k+2} - \frac{\sigma_{22}^{k+2}}{2} V^{k+2} - \frac{\sigma_{32}^{k+2}}{2} I^{k+2} + \\ & \delta_S \delta + \delta_V V + \delta_I I - \frac{\sigma_{42}^{k+2}}{2} B^{k+2} - \frac{\sigma_{52}^{k+2}}{2} R^{k+2} + \\ & \frac{\sigma_{12}\sigma_{11}^{k-1}}{1-k} \Lambda。 \end{aligned}$$

第四步对 V_4 使用 Itô 公式得:

$$\begin{aligned} LV_4 = & -\frac{\Lambda}{S} - \frac{\eta V}{S} + \left(\phi + \frac{\beta B}{K+B} + \mu \right) + \\ & \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{12}S)^2 - \frac{\phi S}{V} + \frac{\sigma\beta B}{K+B} + (\mu + \eta) + \\ & \frac{1}{2} (\sigma_{21} + \sigma_{22}V)^2 - \frac{\xi I}{B} + \delta + \frac{1}{2} (\sigma_{41} + \sigma_{42}B)^2 - \\ & \frac{\gamma I}{B} + \mu + \frac{1}{2} (\sigma_{51} + \sigma_{52}R)^2。 \end{aligned}$$

第五步对 V 使用 Itô 公式得:

$$\begin{aligned} LV \leq & -M\varphi(R_0^s - 1) + \\ & M \left[C_2\sigma_{32}^2I^2 + \left(\frac{2C_3\sigma_{42}\xi}{(1-p)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) I \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{12}^{k+2}}{4} S^{k+2} - \frac{\sigma_{22}^{k+2}}{4} V^{k+2} - \frac{\sigma_{32}^{k+2}}{4} I^{k+2} - \\ & \frac{\sigma_{42}^{k+2}}{4} S^{k+2} - \frac{\sigma_{52}^{k+2}}{4} R^{k+2} - \frac{\Lambda}{S} - \frac{\phi S}{V} - \\ & \frac{\xi I}{B} - \frac{\eta}{R} + E, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} E = \sup_{(S,V,B,I,R) \in \mathfrak{R}_+^5} & \left\{ -\frac{\sigma_{12}^{k+2}}{4} S^{k+2} - \frac{\sigma_{22}^{k+2}}{4} V^{k+2} - \right. \\ & \frac{\sigma_{32}^{k+2}}{8} I^{k+2} - \frac{\sigma_{42}^{k+2}}{4} B^{k+2} - \frac{\sigma_{52}^{k+2}}{4} R^{k+2} + \\ & \delta_S S + \delta_V V + \delta_I I + \phi + \beta + \mu + \\ & \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{12} S)^2 + \sigma \beta + \mu + \eta + \\ & \frac{1}{2} (\sigma_{21} + \sigma_{22} V)^2 + \delta + \frac{1}{2} (\sigma_{41} + \sigma_{42} B)^2 + \\ & \left. \mu + \frac{1}{2} (\sigma_{51} + \sigma_{52} R)^2 \right\}. \end{aligned}$$

定义有界闭集:

$$D_\varepsilon = \left\{ \varepsilon \leq S \leq \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon^2 \leq V \leq \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon \leq I \leq \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon^2 \leq B \leq \frac{1}{\varepsilon^2}, \varepsilon^2 \leq R \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \right\}$$

这里 $0 < \varepsilon < 1$ 并且充分小。将集合 $\mathfrak{R}_+^5 \setminus D_\varepsilon =$

$D_1^c \cup D_2^c \cup \dots \cup D_{10}^c$ 分成如下区间:

$$\begin{aligned} D_1^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, 0 < S < \varepsilon \right\}; \\ D_2^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, 0 < V < \varepsilon^2, S \geq \varepsilon \right\}; \\ D_3^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, 0 < I < \varepsilon \right\}; \\ D_4^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, 0 < B < \varepsilon^2, I \geq \varepsilon \right\}; \\ D_5^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, 0 < R < \varepsilon^2, I \geq \varepsilon \right\}; \\ D_6^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, \frac{1}{\varepsilon} < S \right\}; \\ D_7^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, \frac{1}{\varepsilon} < V \right\}; \\ D_8^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, \frac{1}{\varepsilon} < I \right\}; \\ D_9^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, \frac{1}{\varepsilon} < B \right\}; \\ D_{10}^c &= \left\{ (S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5, \frac{1}{\varepsilon} < R \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{记 } C = \sup_{(S,V,B,I,R) \in \mathfrak{R}_+^5} & \left\{ -\frac{\sigma_{32}^{k+2}}{8} I^{k+2} + \right. \\ & \left. M \left[C_2 \sigma_{32}^2 I^2 + \left(\frac{2C_3 \sigma_{42} \xi}{(1-P)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) I \right] + E \right\}. \end{aligned}$$

取 M, ε 满足下式:

$$-\frac{\Lambda}{\varepsilon} + C \leq -1 \quad (4)$$

$$-\frac{\phi}{\varepsilon} + C \leq -1 \quad (5)$$

$$-M\varphi(R_0^S - 1) + M \left[C_2 \sigma_{32}^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{2C_3 \sigma_{42} \xi}{(1-P)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) \varepsilon \right] + E \leq -1 \quad (6)$$

$$-\frac{\xi}{\varepsilon} + C \leq -1 \quad (7)$$

$$-\frac{\gamma}{\varepsilon} + C \leq -1 \quad (8)$$

$$-\frac{\sigma_{12}^{k+2}}{4\varepsilon^{k+2}} + C \leq -1 \quad (9)$$

$$-\frac{\sigma_{22}^{k+2}}{4\varepsilon^{k+2}} + C \leq -1 \quad (10)$$

$$-\frac{\sigma_{32}^{k+2}}{8\varepsilon^{k+2}} + C \leq -1 \quad (11)$$

$$-\frac{\sigma_{42}^{k+2}}{4\varepsilon^{k+2}} + C \leq -1 \quad (12)$$

$$-\frac{\sigma_{52}^{k+2}}{4\varepsilon^{k+2}} + C \leq -1 \quad (13)$$

情况 1 $(S, V, B, I, R) \in D_1^c$, 结合式 (4) 得:

$$LV \leq -\frac{\Lambda}{S} + C \leq -\frac{\Lambda}{\varepsilon} + C \leq -1.$$

情况 2 $(S, V, B, I, R) \in D_2^c$, 结合式 (5) 得:

$$LV \leq -\frac{\phi S}{V} + C \leq -\frac{\phi}{\varepsilon} + C \leq -1.$$

情况 3 $(S, V, B, I, R) \in D_3^c$, 结合式 (6) 得:

$$\begin{aligned} LV &\leq -M\varphi(R_0^S - 1) + M \left[C_2 \sigma_{32}^2 I^2 + \left(\frac{2C_3 \sigma_{42} \xi}{(1-P)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) I \right] + E \\ &\leq -M\varphi(R_0^S - 1) + M \left[C_2 \sigma_{32}^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{2C_3 \sigma_{42} \xi}{(1-P)\sigma_{41}} + \frac{\xi}{\delta} \right) \varepsilon \right] + E \\ &\leq -1. \end{aligned}$$

情况 4 $(S, V, B, I, R) \in D_4^c$, 结合式 (7) 得:

$$LV \leq -\frac{\xi I}{B} + C \leq -\frac{\xi}{\varepsilon} + C \leq -1.$$

情况 5 $(S, V, B, I, R) \in D_5^c$, 结合式 (8) 得:

$$LV \leq -\frac{\gamma I}{R} + C \leq -\frac{\gamma}{\varepsilon} + C \leq -1.$$

情况 6 $(S, V, B, I, R) \in D_6^c$, 结合式 (9) 得:

$$LV \leq -\frac{\sigma_{12}^{k+2}}{4} S^{k+2} + C \leq -\frac{\sigma_{12}^{k+2}}{4\varepsilon^{k+2}} + C \leq -1.$$

情况 7 $(S, V, B, I, R) \in D_7^c D_8^c D_9^c D_{10}^c$ 时, 采用与情况 6 同样的方法, 结合式 (10) - (13) 可以得 $LV \leq -1$.

从情况 1-7 的分析可以得出, 当 $(S, V, B, I, R) \in \mathfrak{R}_+^5 \setminus D_\varepsilon$ 时, 有 $LV \leq -1$ 成立, 即引理 5 条件 (C2) 成立, 因此模型 (3) 具有唯一遍历平稳分布。定理 1 证毕。

3 数值模拟

将通过数值模拟验证本文的理论结果。所使用的的数据来源于文献[4,17-18], 具体数值见表 1。

表 1 模型 3 的系数值

Table 1 Parameter values for the model (3)

系数	数值	来源文献
Λ	0.1/day	[4]
ϕ	0.01/day	[4]
β	0.8/day	[17]
K	10^4 cells/ml	[17]assumed
η	0.005/day	[4]
μ	2.2493×10^{-5} day	[18]
σ	10%	[4]
γ	0.004/day	[17]
d	0.015/day	[17]
ξ	100 cells/ml-per day	[18]
δ	0.012/day	[18]

依据 Milstein^[19] 给出的方法, 以及文献[20], 构造式 (3) 的离散方程如下:

$$\begin{cases}
 S^{k+1} = S^k + \left(\Lambda - \phi S^k - \frac{\beta S^k B^k}{K + B^k} - \mu S^k + \eta V^k \right) \Delta t + S^k (\sigma_{11} S^k + \sigma_{12}) \sqrt{\Delta t} \xi_{1,k} \\
 \quad + \frac{S^k}{2} (2\sigma_{11}^2 (S^k)^2 + 3\sigma_{11}\sigma_{12} S^k + \sigma_{12}^2) (\xi_{1,k}^2 - 1) \sqrt{\Delta t} \\
 V^{k+1} = V^k + \left(\phi S^k - \frac{\sigma \beta S^k B^k}{K + B^k} - (\mu + \eta) V^k \right) \Delta t + V^k (\sigma_{21} S^k + \sigma_{22}) \sqrt{\Delta t} \xi_{2,k} \\
 \quad + \frac{V^k}{2} (2\sigma_{21}^2 (V^k)^2 + 3\sigma_{21}\sigma_{22} V^k + \sigma_{22}^2) (\xi_{2,k}^2 - 1) \sqrt{\Delta t} \\
 I^{k+1} = I^k + \left(\frac{\beta S^k B^k}{K + B^k} + \frac{\sigma \beta S^k B^k}{K + B^k} - (\mu + \gamma + d) I^k \right) \Delta t + I^k (\sigma_{31} I^k + \sigma_{32}) \sqrt{\Delta t} \xi_{3,k} \\
 \quad + \frac{I^k}{2} (2\sigma_{31}^2 (I^k)^2 + 3\sigma_{31}\sigma_{32} I^k + \sigma_{32}^2) (\xi_{3,k}^2 - 1) \sqrt{\Delta t} \\
 B^{k+1} = B^k + (\xi I^k - \delta B^k) \Delta t + B^k (\sigma_{41} B^k + \sigma_{42}) \sqrt{\Delta t} \xi_{4,k} \\
 \quad + \frac{B^k}{2} (2\sigma_{41}^2 (B^k)^2 + 3\sigma_{41}\sigma_{42} B^k + \sigma_{42}^2) (\xi_{4,k}^2 - 1) \sqrt{\Delta t} \\
 R^{k+1} = R^k + (\gamma I^k - \mu R^k) \Delta t + R^k (\sigma_{51} B^k + \sigma_{52}) \sqrt{\Delta t} \xi_{5,k} \\
 \quad + \frac{R^k}{2} (2\sigma_{51}^2 (R^k)^2 + 3\sigma_{51}\sigma_{52} R^k + \sigma_{52}^2) (\xi_{5,k}^2 - 1) \sqrt{\Delta t}
 \end{cases}$$

其中 $\xi_{i,k}$ (1,2,3,4,5) 是 5 个独立的服从高斯分布的随机变量, Δt 为时间增量。文献 [4] 中初值为 $(S(0), V(0), I(0), B(0), R(0)) = (6000, 300, 1700, 300000, 300)$ 。取噪音强度为 $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{41}, \sigma_{42}, \sigma_{51}, \sigma_{52}) = (0.01, 0.01, 0.2, 0.15, 0.01, 0.12, 0.01, 0.2, 0.2, 0.2), P=0.01$ 。

则此时 $R_0^S = \frac{\Lambda \beta \xi}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \phi} = 2.0782 > 1$ 。意味着模型 (3) 具

有唯一平稳分布并具有遍历性, 这也说明模型 (3) 的霍乱具有稳定性, 见图 1-图 5。

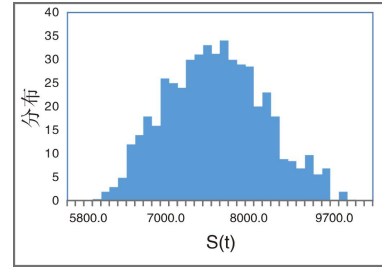


图 1 $S(t)$ 分布图

Fig.1 Density of $S(t)$

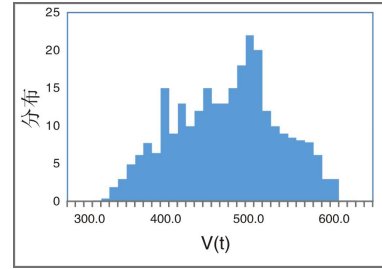


图 2 $V(t)$ 分布图

Fig.2 Density of $V(t)$

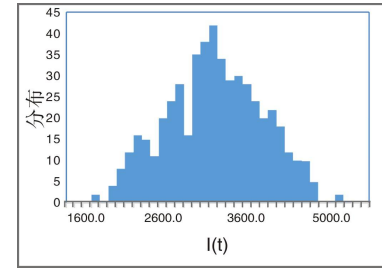


图 3 $I(t)$ 分布图

Fig.3 Density of $I(t)$

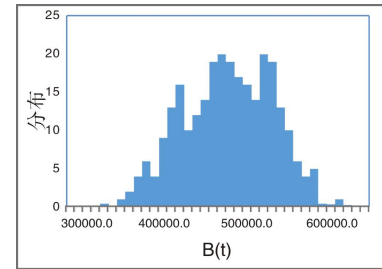


图 4 $B(t)$ 分布图

Fig.4 Density of $B(t)$

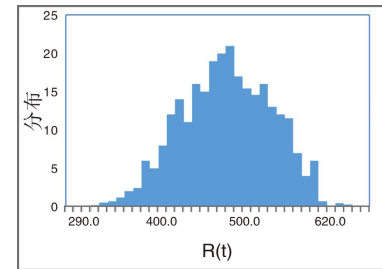


图 5 $R(t)$ 分布图

Fig.5 Density of $R(t)$

4 结论

对于具有非线性扰动和疫苗接种的随机霍乱模型, 本文通过使用随机 Lyapunov 分析法, 以及 Itô 公式, 证明了当关键值 $R_0^s > 1$ 成立时, 随机霍乱模型存在唯一的遍历平稳分布。因为是二阶非线性扰动, 所以在构造 Lyapunov 函数以及证明过程是比较困难的。文中所构造的 Lyapunov 函数的方式以及证明过程简化有效, 可以推广到类似模型的证明中。最后用数值模拟验证了结论的正确性。

参考文献:

- [1] Zhang X H, Hao P. Stationary distribution of a stochastic cholera epidemic model with vaccination under regime switching[J]. Applied Mathematics Letters, 2020(102):1-7.
- [2] Codecò C T. Endemic and epidemic dynamics of cholera: the role of the aquatic reservoir[J]. BMC Infect. Dis., 2001(1):1-14.
- [3] Tien J H, Earn D J D. Multiple transmission pathways and disease dynamics in a waterborne pathogen model[J]. Bull. Math. Biol., 2010 (72) :1506-1533.
- [4] Tian X, Xu R, Lin J. Mathematical analysis of a cholera infection model with vaccination strategy[J]. Appl. Math. Comput., 2019 (361) :517-535.
- [5] Liu M, Deng M L. Analysis of a stochastic hybrid Population model with Allee effect[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 364:124582.
- [6] 余高焱. 一类霍乱模型行波解的存在性[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2019.
- [7] 杨炜明, 廖书. 含有预防接种的霍乱时滞模型的稳定性和 hopf 分支分析[J]. 应用数学学报, 2018, 41(6):735-749.
- [8] 吴青青. 一类非均质空间中的霍乱扩散模型的动力学行为[D]. 扬州: 扬州大学, 2018.
- [9] 杜争光. 具有 Holling IV 型功能反应的分数阶捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2019, 40(3):9-13, 23.
- [10] 廖书, 杨炜明. 含有预防接种的霍乱最优控制模型分析[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(12):2257-2271.
- [11] 王来全, 夏米西努尔·阿布都热合曼. 一类具有季节变化和周期解的随机 SIR 传染病模型[J]. 北华大学学报自然科学版, 2020, 21(5):568-572.
- [12] 文乾英, 焦建军. 在随机环境中的非自治 SI 传染病模型的动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(11): 255-259.
- [13] 辛明振. 两类随机传染病模型的动力学行为研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2020.
- [14] Liu Q, Jiang D Q. Stationary distribution and extinction of a stochastic SIR model with nonlinear perturbation[J]. Applied Mathematics Letters, 2017(73):8-15.
- [15] Has'minskii R. Stochastic stability of differential equations[M]. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [16] Mao X. Stochastic differential equations and applications, seconded[M]. Chichester UK: Horwood, 2008.
- [17] Hartley D M, Jr J G M, Smith D L. Hyperinfectivity: A Critical Element in the Ability of V. cholerae to Cause Epidemics? [J]. PLoS Medicine, 2006, 3(1):e7.
- [18] Modnak C. A model of cholera transmission with Hyper-infectivity and its optimal vaccination control [J]. International Journal of Biomathematics, 2017, 10(6):201-216.
- [19] Higham, Desmond J. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations[J]. Siam Review, 2001, 43(3):525-546.
- [20] Han B T, Jiang D Q, Hayat T, et al. Stationary distribution and extinction of a stochastic staged progression AIDS model with staged treatment and second-order perturbation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020: 140.