

文章编号: 1674-8085(2020)05-0005-05

最大度较小的图的线性着色

*彩春丽, 易 华

(井冈山大学数理学院, 江西, 吉安 343009)

摘 要: 本文研究了最大度较小的图的线性着色问题。通过分析未着色顶点的邻近顶点的着色情况, 扩充图的部分线性着色, 利用数学归纳法证明了 $\Delta(G) \leq 4$ 的非 4 正则图 G 的线性色数有 $lc(G) \leq 7$ 和 $\Delta(G) \leq 5$ 的非 5 正则图 G 的线性色数有 $lc(G) \leq 13$ 。

关键词: 最大度; 线性着色; 线性色数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2020.05.002

LINEAR COLORING OF GRAPHS WITH SMALL MAXIMUM DEGREE

CAI Chun-li, YI Hua

(School of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an Jiangxi 343009, China)

Abstract: we studied the problem of linear coloring of graphs with small maximum degree. By analyzing the coloring of the vertices with distance at most 2 from the uncolored vertex, extending the partial linear coloring of graph to the whole graph, and using mathematical induction, we proved that $lc(G) \leq 7$ if G is not 4-regular graph with $\Delta(G) \leq 4$, and $lc(G) \leq 13$ if G is not 5-regular graph with $\Delta(G) \leq 5$.

Key words: maximum degree; linear coloring; linear chromatic number

0 引言

本文所考虑的图均为简单有限无向图。图 G 的线性着色是图 G 的正常顶点着色, 并使得由着任意两种颜色的顶点导出的子图为一组不相交的路的并, 即由路组成的森林。图 G 的线性色数是指对图 G 进行线性着色所用最少颜色数, 记为 $lc(G)$ 。与线性着色相关的两个概念是不足着色和无圈着色。图 G 的 k -不足着色是图 G 的正常顶点着色, 并使得每种颜色在每个顶点的邻集中都至多出现 $k-1$ 次。图 G 的正常顶点着色若不含双色圈, 则是无圈着色。显然图的线性着色同时满足无圈着色和 3-不足着色。 k 正则图指各顶点的度数都为 k 的图。顶点 v 的 3-不足性指每种颜色在与顶点 v 相邻的所有顶点上都至多出现 2 次。

Yuster^[1]首先介绍并研究了图的线性着色, 用概率方法证明了一般图 G 的线性色数满足 $lc(G) = O(\Delta^{3/2})$ 。Esperet 和 Montassier 等^[2]研究了 $\Delta(G) \leq 3$ 的图及 $\Delta(G) \leq 4$ 的图的线性选择着色。Cai 和 Xie 等^[3]证明了平面图线性色数有 $lc(G) \leq \Delta(G) + 7$ 。Liu 和 Yu^[4]研究了子立方图的线性着色, 证明了不含同构于 $K_{3,3}$ 或 C_5 分支的子立方图是超线性 4-可选择的。Li 和 Wang 等^[5]证明了 $\Delta(G) \geq 2$ 的图 G , 其线性色数有 $lc(G) \leq (\Delta^2(G) + \Delta(G))/2$, 并证明了 $\Delta(G) \leq 4$ 的图 G 有 $lc(G) \leq 8$ 和 $\Delta(G) \leq 5$ 的图 G 有 $lc(G) \leq 14$ 。本文证明 $\Delta(G) \leq 4$ 的非 4 正则图 G 的线性色数有 $lc(G) \leq 7$ 和 $\Delta(G) \leq 5$ 的非 5 正则图 G 的线性色数有 $lc(G) \leq 13$ 。有关线性着色的更多结果可见文献

收稿日期: 2020-04-20; 修改日期: 2020-05-18

作者简介: *彩春丽(1986-), 女, 河南商丘人, 助教, 硕士, 主要从事图论及其应用研究(Email:619662208@qq.com);

易 华(1973-), 男, 湖北松滋人, 讲师, 博士, 主要从事小波分析及其应用研究(Email:876145777@qq.com)。

[6-8]。

1 符号说明

图 G 的顶点集、边集、最大度和最小度分别用 $V(G)$, $E(G)$, $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示。在图 G 中, 用 $d_G(v)$ 表示顶点 v 的度数, 简记为 $d(v)$; 用 $N_G(v)$ 表示图 G 中与顶点 v 相邻的顶点集, 简记为 $N(v)$ 。图 G 中度数为 k 的顶点称为 k -点。图 $G-v$ 表示从图 G 中删除顶点 v 以及与顶点 v 相关联的边后所得到的子图。设 c 是图 G 的部分线性着色, 即 G 的某子图的线性着色, 用 $c(v)$ 表示线性着色 c 下顶点 v 所着的颜色, 用 $C_2(v)$ 表示线性着色 c 下在 $N_G(v)$ 中恰好出现两次的颜色集。对于 $V_0 \subseteq V(G)$, 用 $C_{22}(V_0)$ 表示线性着色 c 下在 V_0 中至少出现两次的颜色集。

2 主要结果

定理 1 设 G 是满足 $\Delta(G) \leq 4$ 的非 4 正则图, 则 $lc(G) \leq 7$ 。

证明 对 G 的顶点数 $|V(G)|$ 用数学归纳法来证明该定理。当 $|V(G)| \leq 7$ 时, 结论显然成立。假设对任何满足顶点数小于 $|V(G)|$, 并且最大度不超过 4 的非 4 正则图都是线性 7-可着色的。下面证明图 G 也是线性 7-可着色的。

由 G 是满足 $\Delta(G) \leq 4$ 的非 4 正则图, 知 $\delta(G) \leq 3$ 。

若 $\delta(G) = 1$, 则 G 中存在 1-点 v 。由归纳假设, 图 $G-v$ 是线性 7-可着色的, 即图 $G-v$ 存在一个线性 7 着色 c 。而给顶点 v 着色时, v 需先禁用与它相邻的顶点 u 的颜色。此外为保证顶点 u 的 3-不足性, 顶点 v 还需禁用 $C_2(u)$ 中颜色。因 $\Delta(G) \leq 4$, 故 $|C_2(u)| \leq 1$ 。所以顶点 v 禁用至多两种颜色, 显然可以将图 $G-v$ 的线性 7 着色 c 扩充到图 G , 从而图 G 是线性 7-可着色的。

若 $\delta(G) = 2$, 则 G 中存在 2-点 v 。由归纳假设, 图 $G-v$ 是线性 7-可着色的, 即图 $G-v$ 存在一个线性 7 着色 c 。令 $N_G(v) = \{v_1, v_2\}$ 。在线性 7 着色 c 下, 若 $c(v_1) \neq c(v_2)$, 则给顶点 v 着

色时, v 只需禁用颜色 $c(v_1)$ 、 $c(v_2)$ 以及颜色集 $C_2(v_1)$ 和 $C_2(v_2)$ 中的颜色。

又由 $\Delta(G) \leq 4$, 知 $|C_2(v_1)| \leq 1$ 且 $|C_2(v_2)| \leq 1$ 。故此时顶点 v 禁用至多 4 种颜色。若 $c(v_1) = c(v_2)$, 则给顶点 v 着色时, v 先禁用颜色 $c(v_1)$, 此外为满足顶点 v_1 和 v_2 的 3-不足性以及避免双色圈的产生, v 还需禁用颜色集 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \setminus \{v\})$ 中颜色。因 $\Delta(G) \leq 4$, 所以 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \setminus \{v\})$ 中至多有 3 种颜色。故此时顶点 v 也禁用至多 4 种颜色。

显然可以将图 $G-v$ 的线性 7 着色 c 扩充到图 G , 从而图 G 是线性 7-可着色的。

若 $\delta(G) = 3$, 则 G 中存在 3-点 v 。

令 $N_G(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$ 。当 $v_1v_2 \in E(G)$ 时, 令 $H = G-v$; 当 $v_1v_2 \notin E(G)$ 时, 令 $H = G-v + \{v_1v_2\}$, 统一记为 $H = G-v \oplus \{v_1v_2\}$ 。由归纳假设, 图 H 是线性 7-可着色的, 即图 H 存在一个线性 7 着色 c , 它在图 G 中是图 G 的部分线性 7 着色。

下面给图 G 中未着色顶点 v 着色。因为 $v_1v_2 \in E(H)$, 所以 $c(v_1)$ 不同于 $c(v_2)$ 。若顶点 v_3 与顶点 v_1 和 v_2 都不同色, 则给顶点 v 着色时, v 需先禁用颜色 $c(v_1)$, $c(v_2)$ 和 $c(v_3)$, 此外为满足顶点 v_1, v_2 和 v_3 的 3-不足性, 顶点 v 还需禁用颜色集 $C_2(v_1)$, $C_2(v_2)$ 和 $C_2(v_3)$ 中的颜色。因 $\Delta(G) \leq 4$, 故 $|C_2(v_i)| \leq 1, i = 1, 2, 3$ 。所以此时顶点 v 禁用至多 6 种颜色。

若顶点 v_3 与顶点 v_1, v_2 中某个顶点同色, 不妨设顶点 v_3 与 v_1 同色, 则给顶点 v 着色时, v 需先禁用颜色 $c(v_1)$ 和 $c(v_2)$, 此外为满足顶点 v_1, v_2 和 v_3 的 3-不足性以及避免双色圈的产生, v 还需禁用颜色集 $C_2(v_2)$ 和 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_3)) \setminus \{v\})$ 中的颜色。因 $\Delta(G) \leq 4$, 所以 $|C_2(v_2)| \leq 1$ 且 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_3)) \setminus \{v\})$ 中至多有 3 种颜色。故此时顶点 v 也禁用至多 6 种颜色。两种情况下顶点 v 禁用的颜色数都小于 7, 故可将图 H 的线性 7 着色 c 扩充到图 G , 从而图 G 是线性 7-可着色的。

综上, 图 G 总可以从它的部分线性 7 着色通

过扩充到未着色点上得到图 G 的线性 7 着色, 所以图 G 是线性 7-可着色的, 故 $lc(G) \leq 7$ 。

定理 2 设 G 是满足 $\Delta(G) \leq 5$ 的非 5 正则图, 则 $lc(G) \leq 13$ 。

证明 对 G 的顶点数 $|V(G)|$ 用归纳法来证明该定理。当 $|V(G)| \leq 13$ 时, 结论显然成立。假设对任何满足顶点数小于 $|V(G)|$, 并且最大度不超过 5 的非 5 正则图都是线性 13-可着色的。

下面证明图 G 也是线性 13-可着色的。因 G 是满足 $\Delta(G) \leq 5$ 的非 5 正则图, 所以有 $\delta(G) \leq 4$ 。

若 $\delta(G) = 1$, 则 G 中存在 1-点 v 。由归纳假设, 图 $G - v$ 是线性 13-可着色的, 即图 $G - v$ 存在一个线性 13 着色 c 。而给顶点 v 着色时, v 只需禁用与它相邻的顶点 u 的颜色以及 $C_2(u)$ 中的颜色。又由 $\Delta(G) \leq 5$, 知 $|C_2(u)| \leq 2$, 故顶点 v 禁用至多 3 种颜色, 显然可以将图 $G - v$ 的线性 13 着色 c 扩充到图 G , 从而图 G 是线性 13-可着色的。

若 $\delta(G) = 2$, 则 G 中存在 2-点 v 。由归纳假设知, 图 $G - v$ 是线性 13-可着色的, 即图 $G - v$ 存在一个线性 13 着色 c 。而给顶点 v 着色时, v 需先禁用与它相邻的两个顶点 v_1 和 v_2 的颜色, 此外为满足顶点 v_1 和 v_2 的 3-不足性以及避免双色圈的产生, 顶点 v 还需禁用 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \setminus \{v\})$ 中的颜色。由 $\Delta(G) \leq 5$, 知 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_2)) \setminus \{v\})$ 中颜色数至多为 4, 故顶点 v 禁用至多 6 种颜色, 显然可以将图 $G - v$ 的线性 13 着色 c 扩充到图 G , 从而图 G 是线性 13-可着色的。

若 $\delta(G) = 3$, 则 G 中存在 3-点 v 。

设 $N_G(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$ 。令 $H = G - v \oplus \{v_1 v_2\}$, 这里 $v_1 v_2 \in E(G)$ 时, $H = G - v$; $v_1 v_2 \notin E(G)$ 时, $H = G - v + \{v_1 v_2\}$ 。

由归纳假设, 图 H 是线性 13-可着色的, 即图 H 存在一个线性 13 着色 c , 它在图 G 中是图 G 的部分线性 13 着色。

下面给图 G 中未着色顶点 v 着色。因为 $v_1 v_2 \in E(H)$, 所以 $c(v_1) \neq c(v_2)$ 。若颜色

$c(v_1), c(v_2)$ 和 $c(v_3)$ 互不同, 则给顶点 v 着色时, v 先禁用颜色 $c(v_1), c(v_2)$ 和 $c(v_3)$, 此外为满足顶点 v_1, v_2 和 v_3 的 3-不足性, 顶点 v 还需禁用颜色集 $C_2(v_1), C_2(v_2)$ 和 $C_2(v_3)$ 中的颜色。因 $\Delta(G) \leq 5$, 故 $|C_2(v_i)| \leq 2, i = 1, 2, 3$ 。所以此时顶点 v 禁用至多 9 种颜色。

若顶点 v_3 与顶点 v_1, v_2 中某个顶点同色, 不妨设 $c(v_3) = c(v_1)$, 则给顶点 v 着色时, v 先禁用颜色 $c(v_1)$ 和 $c(v_2)$, 此外为满足顶点 v_1, v_2 和 v_3 的 3-不足性以及避免双色圈的产生, 顶点 v 还需禁用颜色集 $C_2(v_2)$ 和 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_3)) \setminus \{v\})$ 中的颜色。因 $\Delta(G) \leq 5$, 所以 $|C_2(v_2)| \leq 2$ 并且 $C_{22}((N_G(v_1) \cup N_G(v_3)) \setminus \{v\})$ 中至多有 4 种颜色。故此时顶点 v 禁用至多 8 种颜色。

显然两种情况下都可以将图 H 的线性 13 着色 c 扩充到图 G , 从而图 G 是线性 13-可着色的。

若 $\delta(G) = 4$, 则 G 中存在 4-点 v 。

我们考虑最坏的情况, 假设与 4-点 v 相邻的顶点全是 5-点, 其中一个记作 u , 并设 $N_G(u) = \{v, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 。令 $H = G - u \oplus \{u_1 u_2, u_3 u_4\}$, 这里 $u_1 u_2, u_3 u_4 \in E(G)$ 时, $H = G - u$; $u_1 u_2 \in E(G), u_3 u_4 \notin E(G)$ 时, $H = G - u + \{u_3 u_4\}$; $u_1 u_2 \notin E(G), u_3 u_4 \in E(G)$ 时, $H = G - u + \{u_1 u_2\}$; $u_1 u_2, u_3 u_4 \notin E(G)$ 时, $H = G - u + \{u_1 u_2, u_3 u_4\}$ 。由归纳假设, 图 H 是线性 13-可着色的, 即图 H 存在一个线性 13 着色 c , 所用颜色集设为 $C = \{1, 2, \dots, 13\}$ 。显然图 H 的线性 13 着色 c 在图 G 中是图 G 的部分线性 13 着色。

下面给图 G 中未着色顶点 u 着色。令 $S = \{c(v), c(u_1), c(u_2), c(u_3), c(u_4)\}$, 这里 S 中的元素可重复出现, 用 $\tau(S)$ 表示 S 中元素出现的最大重数。由 $u_1 u_2, u_3 u_4 \in E(H)$, 知 $c(u_1) \neq c(u_2)$, $c(u_3) \neq c(u_4)$, 故 $1 \leq \tau(S) \leq 3$ 。

当 $\tau(S) = 1$ 时, 顶点 v, u_1, u_2, u_3, u_4 互不同色, 不妨设 $c(u_i) = i, i = 1, 2, 3, 4, c(v) = 5$ 。

若存在颜色 $a \in \{6, 7, \dots, 13\}$ 满足 $a \notin C_2(u_i), i = 1, 2, 3, 4$ 且 $a \notin C_2(v)$, 则用该颜色 a 给顶点 u 着色即可。否则 $\{6, 7, \dots, 13\}$ 中的每种颜

色都至少属于某一个 $C_2(u_i), i=1,2,3,4$ 或 $C_2(v)$ 。

由 $\Delta(G) \leq 5$, 知 $|N_G(u_i) \setminus \{u\}| \leq 4, i=1,2,3,4$, 从而 $|C_2(u_i)| \leq 2, i=1,2,3,4$ 。由 $d_H(v)=3$, 知 $|C_2(v)|=1$ 。而 $\{6,7,\dots,13\}$ 中有 8 种颜色, 所以 $C_2(u_i), i=1,2,3,4$ 中至少有三个颜色集都含两种颜色, 不妨设 $|C_2(u_i)|=2, i=1,2,3$ 。

另外注意到 $\{6,7,\dots,13\}$ 中的 8 种颜色需占用 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 和 $N_G(u_i) \setminus \{u\}, i=1,2,3,4$ 中至少 16 个顶点, 而易知 $|N_G(v) \setminus \{u\}| + \sum_{i=1}^4 |N_G(u_i) \setminus \{u\}| \leq 19$, 所以在颜色集 $\{1,2\}$ 中至少有一种颜色 $b \notin C_2(v)$ 且 $b \notin C_2(u_i), i=1,2,3,4$ 。

不妨设 $b=1$, 于是可用顶点 u_1 的颜色 1 给顶点 u 着色, 然后给顶点 u_1 重新着色。注意到所设的 $|C_2(u_1)|=2$, 又 $|N_G(u_1) \setminus \{u\}| \leq 4$, 所以给顶点 u_1 重新着色时, u_1 需先禁用顶点 u 的颜色 1 以及 $C_2(u_1)$ 中的两种颜色。此外为保证与 u_1 相邻的顶点的 3-不足性以及避免双色圈的产生, u_1 还需禁用的颜色数至多为 $\lfloor (4+4)/2 \rfloor \times 2 = 8$, 故顶点 u_1 共需禁用的颜色数至多为 11, 所以可从颜色集 $C = \{1,2,\dots,13\}$ 中取颜色给顶点 u_1 重新着色, 从而得到图 G 的一个线性 13 着色, 故图 G 是线性 13-可着色的。

当 $\tau(S)=2$ 时, 注意到 $c(u_1) \neq c(u_2)$, $c(u_3) \neq c(u_4)$, 由对称性, 只需考虑以下情况。

情况 1 $c(v)=c(u_1), c(u_2), c(u_3), c(u_4)$ 互不同。

不妨设 $c(v)=c(u_1)=1, c(u_i)=i, i=2,3,4$ 。如果在颜色集 $\{5,6,\dots,13\}$ 中存在颜色 a 满足 $a \notin C_2(u_i), i=2,3,4$ 且 $a \notin C_{22}((N_G(v) \cup N_G(u_1)) \setminus \{u\})$, 则用该颜色 a 给顶点 u 着色即可。否则颜色集 $\{5,6,\dots,13\}$ 中每种颜色都至少属于某一个 $C_2(u_i), i=2,3,4$ 或 $C_{22}((N_G(v) \cup N_G(u_1)) \setminus \{u\})$ 。

由 $\Delta(G) \leq 5$, 知 $|N_G(u_i) \setminus \{u\}| \leq 4, i=2,3,4$, 故 $|C_2(u_i)| \leq 2, i=2,3,4$ 。由 $d_G(v)=4, d_G(u_1) \leq \Delta(G) \leq 5$, 知 $C_{22}((N_G(v) \cup N_G(u_1)) \setminus \{u\})$ 中至多有 3 种颜色。而颜色集 $\{5,6,\dots,13\}$ 中有 9 种颜色, 所以只有

$|C_2(u_i)|=2, i=2,3,4$ 且 $|C_{22}((N_G(v) \cup N_G(u_1)) \setminus \{u\})|=3$ 。

另外由于 $\{5,6,\dots,13\}$ 中 9 种颜色需占用 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 和 $N_G(u_i) \setminus \{u\}, i=1,2,3,4$ 中至少 18 个顶点, 而易知 $|N_G(v) \setminus \{u\}| + \sum_{i=1}^4 |N_G(u_i) \setminus \{u\}| \leq 19$, 所以顶点 u_2 的颜色 2 在 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 和 $N_G(u_i) \setminus \{u\}, i=1,2,3,4$ 中顶点上至多出现一次, 故可用顶点 u_2 颜色 2 给顶点 u 着色, 然后给顶点 u_2 重新着色。

注意到 $|C_2(u_2)|=2$, 又因 $|N_G(u_2) \setminus \{u\}| \leq 4$, 所以给顶点 u_2 重新着色时, u_2 需先禁用顶点 u 的颜色 2 以及 $C_2(u_2)$ 中的两种颜色。因为 $c(v)=c(u_1)=1$, 所以为保证顶点 u 的 3-不足性, u_2 还需禁用颜色 1。此外为保证 $N_G(u_2) \setminus \{u\}$ 中各顶点的 3-不足性以及避免双色圈的产生, u_2 还需禁用的颜色数至多为 $\lfloor (4+4)/2 \rfloor \times 2 = 8$, 故顶点 u_2 共需禁用的颜色数至多为 12, 所以还可以从颜色集 $C = \{1,2,\dots,13\}$ 中取颜色给顶点 u_2 重新着色, 从而得到图 G 的一个线性 13 着色, 故图 G 是线性 13-可着色的。

情况 2 $c(v)=c(u_1), c(u_2)=c(u_3)$ 。

不妨设 $c(v)=c(u_1)=1, c(u_2)=c(u_3)=2, c(u_4)=3$ 。由 $\Delta(G) \leq 5$ 且 $d_G(v)=4$, 知 $|N_G(v) \setminus \{u\}| + \sum_{i=1}^4 |N_G(u_i) \setminus \{u\}| \leq 3+16=19$, 而 $\{4,5,\dots,13\}$ 中有 10 种颜色, 所以一定存在颜色 $a \in \{4,5,\dots,13\}$, 满足该颜色 a 在 $N_G(u_i) \setminus \{u\}, i=1,2,3,4$ 和 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 中顶点上至多出现一次, 于是用该颜色 a 给顶点 u 着色即可。

情况 3 $c(u_1)=c(u_4), c(u_2)=c(u_3)$ 。

不妨设 $c(u_1)=c(u_4)=1, c(u_2)=c(u_3)=2, c(v)=3$ 。同情况 2, 在 $\{4,5,\dots,13\}$ 中一定存在一种颜色 a , 它在 $N_G(u_i) \setminus \{u\}, i=1,2,3,4$ 和 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 中顶点上至多出现一次, 于是用该颜色 a 给顶点 u 着色即可。

情况 4 $c(u_1)=c(u_4), c(u_2), c(u_3), c(v)$ 互不同。

不妨设 $c(u_1)=c(u_4)=1, c(u_2)=2, c(u_3)=3, c(v)=4$ 类似于情况 1 如果在颜色集 $\{5, 6, \dots, 13\}$ 中存在颜色 a 满足 $a \notin C_{\geq 2}((N_G(u_1) \cup N_G(u_4)) \setminus \{u\})$, $a \notin C_2(v)$ $a \notin C_2(u_i), i=2, 3$, 则用该颜色 a 给顶点 u 着色即可。否则颜色集 $\{5, 6, \dots, 13\}$ 中每种颜色都至少属于某一个 $C_2(u_i), i=2, 3$ 或者 $C_2(v)$ 或 $C_{\geq 2}((N_G(u_1) \cup N_G(u_4)) \setminus \{u\})$ 。因为 $\Delta(G) \leq 5$, 所以 $|C_2(u_i)| \leq 2, i=2, 3$ 且 $|C_{\geq 2}((N_G(u_1) \cup N_G(u_4)) \setminus \{u\})| \leq 4$ 。

又由 $d_H(v)=3$ 知 $|C_2(v)| \leq 1$ 。而由于颜色集 $\{5, 6, \dots, 13\}$ 中有 9 种颜色, 所以只有 $|C_2(v)|=1, |C_{\geq 2}((N_G(u_1) \cup N_G(u_4)) \setminus \{u\})|=4$ 且 $|C_2(u_i)|=2, i=2, 3$ 。另外由于 $\{5, 6, \dots, 13\}$ 中 9 种颜色需占用 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 和 $N_G(u_i) \setminus \{u\}, i=1, 2, 3, 4$ 中至少 18 个顶点, 而易知 $|N_G(v) \setminus \{u\}| + \sum_{i=1}^4 |N_G(u_i) \setminus \{u\}| \leq 19$, 故类似情况 1, 可用顶点 u_2 颜色 2 给顶点 u 着色, 然后给顶点 u_2 重新着色, 就可得到图 G 的一个线性 13 着色, 故图 G 是线性 13-可着色的。

当 $\tau(S)=3$ 时, 注意到 $c(u_1) \neq c(u_2), c(u_3) \neq c(u_4)$, 不失一般性, 我们不妨设 $c(v)=c(u_1)=c(u_4)$ 。为保证顶点 u 的 3-不足性, 先给顶点 v 重新着色。由 $d_G(v)=4$, 知 $|N_G(v) \setminus \{u\}|=3$ 。若 $c(u_2) \neq c(u_3)$, 则给顶点 v 重新着色时, v 需先禁用 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 中 3 个顶点的颜色以及颜色 $c(u_1)$ 。

此外为满足 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 中 3 个顶点的 3-不足性以及避免双色圈的产生, 顶点 v 还需禁用的颜色数至多为 $\lfloor 3(\Delta(G)-1)/2 \rfloor$, 而由 $\Delta(G) \leq 5$, 知 $\lfloor 3(\Delta(G)-1)/2 \rfloor \leq 6$ 。故此情况下顶点 v 共需禁用的颜色数至多为 10, 显然可以从颜色集 $C = \{1, 2, \dots, 13\}$ 中取颜色给顶点 v 重新着色。

然后归结到 $\tau(S)=2$ 时的情况 2 或情况 4 给顶点 u 着色就可以得到图 G 的一个线性 13 着色。

若 $c(u_2)=c(u_3)$, 则给顶点 v 重新着色时, v 需先禁用 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 中 3 个顶点的颜色以及颜色 $c(u_1)$ 和 $c(u_2)$ 。

此外为满足 $N_G(v) \setminus \{u\}$ 中 3 个顶点的 3-不足性以及避免双色圈的产生, 顶点 v 还需禁用的颜色数至多为 $\lfloor 3(\Delta(G)-1)/2 \rfloor$, 其不超过 6。故此情况下顶点 v 共需禁用的颜色数至多为 11, 显然可以从颜色集 $C = \{1, 2, \dots, 13\}$ 中取颜色给顶点 v 重新着色。然后归结到 $\tau(S)=2$ 时的情况 3 给顶点 u 着色就可以得到图 G 的一个线性 13 着色。

综上, 图 G 总可以从它的一个部分线性 13 着色通过扩充到未着色点上, 必要时给某个已着色顶点重新着色得到图 G 的一个线性 13 着色, 从而图 G 是线性 13-可着色的, 故 $lc(G) \leq 13$ 。

参考文献:

- [1] Yuster R. Linear coloring of graphs [J]. Discrete Mathematics, 1998, 185:293-297.
- [2] Esperet L, Montassier M, Raspaud A. Linear choosability of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308:3938-3950.
- [3] Cai C L, Xie D Z, Yang W J. A result on linear coloring of planar graphs[J]. Information Processing Letters, 2012, 112(22): 880-884.
- [4] Liu C H, Yu G. Linear colorings of subcubic graphs[J]. European Journal of Combinatorics, 2013, 34: 1040-1050.
- [5] Li C, Wang W, Raspaud A. Upper bounds on the linear chromatic number of a graph [J]. Discrete Mathematics, 2011, 311:232-238.
- [6] Dong W, Lin W S. On linear coloring of planar graphs with small girth[J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 173: 35-44.
- [7] Wang Y Q, Wu Q. Linear coloring of sparse graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160: 664-772.
- [8] Wang W F, Wang Y Q. Linear coloring of planar graphs without 4-cycles[J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29: 1113-1124.