

文章编号: 1674-8085(2020)05-0001-04

含参广义向量拟均衡问题有效解映射的下半连续性

孟旭东

(南昌航空大学科技学院, 江西, 南昌 330034)

摘 要: 针对一类含参广义向量拟均衡问题, 在实 Hausdorff 拓扑向量空间中研究了有效解映射的下半连续性。在锥凹、一致连续及 Hausdorff 上半连续的假设下, 运用分析的方法, 得到了含参广义向量拟均衡问题有效解映射下半连续性定理。

关键词: 有效解映射; 下半连续性; 含参广义向量拟均衡问题

中图分类号: O317

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2020.05.001

LOWER SEMI-CONTINUITY OF EFFICIENT SOLUTION MAPPING TO PARAMETRIC GENERALIZED VECTOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS

MENG Xu-dong

(Science College of Nanchang Hang kong University, Nanchang, Jiangxi, 330034, China)

Abstract: The lower semi-continuity of efficient solution mapping to a class of parametric generalized vector quasi-equilibrium problems in real Hausdorff topological vector space is studied. Under the assumption conditions of cone concave, uniformly continuous and Hausdorff upper semi-continuous, the lower semi-continuity theorem for efficient solution mapping to the parametric generalized vector quasi-equilibrium problems is gained by using the method of analysis.

Key words: efficient solution mapping; lower semicontinuity; parametric generalized vector quasi-equilibrium problems

向量优化、向量变分不等式、向量 Nash 平衡及向量补问题等均是向量均衡问题研究的热点问题。文献[1-3]主要讨论了向量均衡问题解的存在性。文献[4-13]重点围绕向量均衡问题解的稳定性进行分析, 主要研究了解映射的下半连续性。文献[4-11]运用标量化方法、稠密性结果、凸分析及光滑分析等研究了含参(集值)向量均衡问题各种有效解映射的下半连续性。在锥凹及一致连续条件下, Rabian, Panatda 和 Pakkapon 在文献[12]中, 运用标量化方法, 讨论了含参广义向量均衡问题近似解映射的下半连续性。在文献[13]中, Han 和 Gong 得到了含参广义强向量均衡问

题有效解映射下半连续性定理。

受文献[12]与文献[13]思想的启发, 在实 Hausdorff 拓扑向量空间中, 研究含参广义向量拟均衡问题的有效解映射的下半连续性。通过转化为集值映射在零点下半连续的方法, 给出含参广义向量拟均衡问题有效解映射下半连续的最优性条件。

1 预备知识

设 X, Y 为两个实 Hausdorff 拓扑向量空间, Z 为实拓扑空间。设 Y 的拓扑对偶空间为 Y^* , Y

收稿日期: 2020-05-08; 修改日期: 2020-06-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11201216); 江西省教育厅科学技术重点研究项目(GJJ181565, GJJ191614); 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ161597)

作者简介: 孟旭东(1982-), 男, 江西南昌人, 副教授, 硕士, 主要从事向量均衡与向量优化理论研究(E-mail: mxudongm@163.com)。

中的闭单位球为 B_Y , Y 中的闭凸点锥 C 满足其拓扑内部 $\text{int } C \neq \emptyset$, C 的共轭锥为 C^* , 即

$$C^* := \{f \in Y^* : f(y) \geq 0, \forall y \in C\}$$

设 $\Lambda, \Omega \subset Z$ 为非空指标集, 考虑含参广义向量拟均衡问题, 简称问题 (GVEP): 对每个 $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$, 找出点 $x_0 \in A(x_0, \mu)$, 使得

$$F(x_0, y, \lambda) \subset C, \forall y \in A(x_0, \mu)$$

其中

$$A: X \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}, F: E \times E \times \Lambda \subset$$

$$X \times X \times Z \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$$

为给定集值映射, 满足

$$A(X \times \Omega) = \bigcup_{(x, \mu) \in X \times \Omega} A(x, \mu) \subset E$$

对每个 $\mu \in \Omega$, 记 $H(\mu) = \{x \in X : x \in A(x, \mu)\}$. 对每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$, 记 $V(\varepsilon, \lambda, \mu)$ 为问题 (GVEP) 的 ε -有效解集, 即 $V(\varepsilon, \lambda, \mu) = \{x \in H(\mu) : F(x, y, \lambda) + \varepsilon e \subset C, \forall y \in H(\mu)\}$ 其中 $e \in -\text{int } C$.

记 $M(\lambda, \mu)$ 为问题 (GVEP) 的有效解映射, 即

$$M(\lambda, \mu) = V(0, \lambda, \mu) =$$

$$\{x \in H(\mu) : F(x, y, \lambda) \subset C, \forall y \in H(\mu)\}$$

定义 1^[13] 设 X, Y 为拓扑向量空间, 设 D 为 X 的非空子集, $G: X \rightarrow 2^Y$ 为给定集值映射. 称 G 在 D 上为一致连续的, 假若对 $0 \in Y$ 的任何邻域 $V \subset Y$, 存在 $0 \in X$ 的邻域 $U_0 \subset X$, 使得对任何的 $x_1, x_2 \in D$, $x_1 - x_2 \in U_0$, 有

$$G(x_1) \subset G(x_2) + V$$

定义 2^[14] 设 X, Y 为拓扑向量空间, D 为 X 的非空凸子集, $G: X \rightarrow 2^Y$ 为给定集值映射. 称 G 在 D 上为 C -凹的, 假若对任何的 $x_1, x_2 \in D$, 及 $t \in [0, 1]$, 有

$$G(tx_1 + (1-t)x_2) \subset tG(x_1) + (1-t)G(x_2) + C$$

定义 3^[15] 设 X, Y 为拓扑向量空间, $G: X \rightarrow 2^Y$ 为给定集值映射.

1) 称 G 在点 $x_0 \in X$ 处是 Hausdorff 上半连续的, 假若对 $0 \in Y$ 的任何邻域 $V \subset Y$, 存在 x_0 的邻域 $U(x_0) \subset X$, 使得

$$G(x) \subset G(x_0) + V, \forall x \in U(x_0)$$

2) 称 G 在点 $x_0 \in X$ 处是下半连续的, 如果对任何 $x \in G(x_0)$, 以及 x 的任何邻域 V , 存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使得

$$G(x) \cap V \neq \emptyset, \forall x \in U(x_0).$$

2 主要结果

设点 $(\lambda_0, \mu_0) \in U_0 \times V_0 \subset \Lambda \times \Omega$ 给定, 其中 $U_0 \times V_0$ 为 (λ_0, μ_0) 的邻域, 讨论问题 (GVEP) 有效解映射 $M(\cdot, \cdot)$ 在点 (λ_0, μ_0) 处的下半连续性.

定理 假设以下条件成立:

- 1) 存在 $\delta > 0, \varepsilon_0 \in [0, \delta]$ 及 $e \in -\text{int } C$, 使得 $V(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$;
 - 2) $H(\mu_0)$ 为 X 的非空凸子集, 且对任何 $y \in H(\mu_0)$, $F(\cdot, y, \lambda_0)$ 在 $H(\mu_0)$ 上 C -凹;
 - 3) $H(\cdot)$ 在 μ_0 处 Hausdorff 上半连续且在 μ_0 处下半连续;
 - 4) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $H(\Omega) \times H(\Omega) \times U_0$ 上一致连续.
- 则 $M(\cdot, \cdot)$ 在 (λ_0, μ_0) 处下半连续.

证明: 由假设条件知 $M(\lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$. 假若 $M(\cdot, \cdot)$ 在 (λ_0, μ_0) 处不是下半连续的. 于是存在 $x_0 \in M(\lambda_0, \mu_0)$ 及 $0 \in X$ 的邻域 W_0 , 对 (λ_0, μ_0) 的任何邻域 $U(\lambda_0) \times V(\mu_0)$, 存在 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in U(\lambda_0) \times V(\mu_0)$, 使得 $(x_0 + W_0) \cap M(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq \emptyset$. 存在序列 $\{(\lambda_n, \mu_n)\}$, $(\lambda_n, \mu_n) \rightarrow (\lambda_0, \mu_0)$, 使得

$$(x_0 + W_0) \cap M(\lambda_n, \mu_n) \neq \emptyset, \forall n \in N^+ \quad (1)$$

对以上的 W_0 , 存在 $0 \in X$ 的邻域 W_1 , 满足

$$W_1 + W_1 \subset W_0 \quad (2)$$

定义集值映射 $T: [0, \delta] \rightarrow 2^X$ 为

$$T(\varepsilon) = V(\varepsilon, \lambda_0, \mu_0) =$$

$$\{x \in H(\mu_0) : F(x, y, \lambda_0) + \varepsilon e \subset C, \forall y \in H(\mu_0)\}$$

其中 $\varepsilon \in [0, \delta], e \in -\text{int } C$. 则 $T(0) = M(\lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$, 且 $T(\cdot)$ 在 0 处下半连续.

事实上, 假若 $T(\cdot)$ 在 0 处不是下半连续的, 则存在 $\bar{x} \in T(0)$ 及 $0 \in X$ 的邻域 $U(0)$, 对 0 的任

何邻域 U , 存在 $\bar{\varepsilon} \in U$, 使得 $(\bar{x} + U(0)) \cap T(\bar{\varepsilon}) = \emptyset$ 。因此, 存在 $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \downarrow 0$, 使得

$$(\bar{x} + U(0)) \cap T(\varepsilon_n) = \emptyset, \forall n \in N^+ \quad (3)$$

由 1), $\varepsilon_0 \in [0, \delta], e \in -\text{int } C$ 知, 存在 $r > 0$, 使得

$$2rB_Y - \varepsilon_0 e \subset C \quad (4)$$

再由 $T(\varepsilon_0) \neq \emptyset$, 取 $x^* \in T(\varepsilon_0)$, 由 $\varepsilon_n \downarrow 0$, 存在 ε_{n_0} , 使得

$$\frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} x^* = \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} (x^* - \bar{x}) \in \bar{x} + U(0) \quad (5)$$

及

$$\varepsilon_{n_0} e \in rB_Y \quad (6)$$

$$\text{则 } \frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} x^* \in T(\varepsilon_{n_0})。$$

事实上, 由 $\bar{x} \in T(0)$ 与 $x^* \in T(\varepsilon_0)$, 对任何的 $y \in H(\mu_0)$, 有 $F(\bar{x}, y, \lambda_0) \subset C$, 及 $F(x^*, y, \lambda_0) + \varepsilon_0 e \subset C$ 。则

$$\frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} F(\bar{x}, y, \lambda_0) \subset C \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} F(x^*, y, \lambda_0) + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} \varepsilon_0 e \subset C$$

由 $F(\cdot, y, \lambda_0)$ 在 $H(\mu_0)$ 上 C -凹及 (7) 知,

$$F\left(\frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} x^*, y, \lambda_0\right) + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} \varepsilon_0 e \subset C \quad (8)$$

$$\text{由 (4) 与 (6) 知, } \varepsilon_{n_0} e - \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} \varepsilon_0 e \in C,$$

并注意到 (8) 得

$$F\left(\frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} x^*, y, \lambda_0\right) + \varepsilon_{n_0} e \subset C$$

$$\text{于是 } \frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} x^* \in T(\varepsilon_{n_0}) \text{ 成立。}$$

再由 (5) 知,

$$\frac{r}{r + \varepsilon_{n_0}} \bar{x} + \frac{\varepsilon_{n_0}}{r + \varepsilon_{n_0}} x^* \in (\bar{x} + U(0)) \cap T(\varepsilon_{n_0}) \neq \emptyset$$

这与 (3) 矛盾, 故 $T(\cdot)$ 在 0 处下半连续。由 $T(\cdot)$ 在 0 处下半连续知, 对以上的 $x_0 \in M(\lambda_0, \mu_0) = T(0)$, 及 W_1 , 存在 0 的平衡邻域 V_0 , 使得

$$(x_0 + W_1) \cap T(\varepsilon) \neq \emptyset, \forall \varepsilon \in V_0$$

取 $\varepsilon' \in V_0 \cap [0, \delta)$, 则

$$(x_0 + W_1) \cap V(\varepsilon', \lambda_0, \mu_0) = (x_0 + W_1) \cap T(\varepsilon') \neq \emptyset$$

设

$$x' \in (x_0 + W_1) \cap V(\varepsilon', \lambda_0, \mu_0) \quad (9)$$

由 $\varepsilon' \in [0, \delta)$ 及 $e \in -\text{int } C$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\delta_0 B_Y - \varepsilon' e \subset C \quad (10)$$

由 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $H(\Omega) \times H(\Omega) \times U_0$ 上一致连续, 对以上的 $\delta_0 B_Y$, 存在 $0 \in E$ 的邻域 V_1 , 存在 $0 \in E$ 的邻域 U_1 , 存在 $0 \in \Lambda$ 的邻域 N_1 , 存在 $0 \in \Omega$ 的邻域 N_2 , 使得对任意的 $(x_1, y_1, \lambda_1), (x_2, y_2, \lambda_2) \in H(\Omega) \times H(\Omega) \times U_0$, 满足 $x_1 - x_2 \in V_1, y_1 - y_2 \in U_1, \lambda_1 - \lambda_2 \in N_1$, 有

$$F(x_1, y_1, \lambda_1) \subset \delta_0 B_Y + F(x_2, y_2, \lambda_2) \quad (11)$$

由 $H(\cdot)$ 在 μ_0 处 Hausdorff 上半连续, 对以上的 U_1 , 存在 μ_0 的邻域 $U_1(\mu_0)$, 使得

$$H(\mu) \subset H(\mu_0) + U_1, \forall \mu \in U_1(\mu_0) \quad (12)$$

由 (9) 知, $x' \in H(\mu_0)$ 。由 $H(\cdot)$ 在 μ_0 处下半连续, 对以上的 $V_1 \cap W_1$, 存在 μ_0 的邻域 $U_2(\mu_0)$, 使得

$$(x' + V_1 \cap W_1) \cap H(\mu) \neq \emptyset, \forall \mu \in U_2(\mu_0) \quad (13)$$

由 $(\lambda_n, \mu_n) \rightarrow (\lambda_0, \mu_0)$, 存在 $(\lambda_{n_0}, \mu_{n_0})$ 使得

$$\lambda_{n_0} \in U_0 \cap (\lambda_0 + N_1),$$

$$\mu_{n_0} \in U_1(\mu_0) \cap U_2(\mu_0) \cap U_0 \cap (\mu_0 + N_2)$$

再由 (12) 与 (13) 知,

$$H(\mu_{n_0}) \subset H(\mu_0) + U_1 \quad (14)$$

且

$$(x' + V_1 \cap W_1) \cap H(\mu_{n_0}) \neq \emptyset \quad (15)$$

取

$$x'' \in (x' + V_1 \cap W_1) \cap H(\mu_{n_0}) \quad (16)$$

则 $x'' \in M(\lambda_{n_0}, \mu_{n_0})$ 。

事实上, 由 (9) 知, 对任何的 $y \in H(\mu_0)$, 有

$$F(x', y, \lambda_0) + \varepsilon' e \subset C \quad (17)$$

对任何的 $y' \in H(\mu_{n_0})$, 由 (14) 知, 存在 $y_0 \in H(\mu_0)$, 使得 $y' - y_0 \in U_1$ 。由 (16) 知, $x'' - x' \in V_1$, 并注意到 $\lambda_{n_0} \in U_0 \cap (\lambda_0 + N_1)$ 及 (11) 知,

$$F(x'', y', \lambda_{n_0}) \subset \delta_0 B_Y + F(x', y_0, \lambda_0)$$

再由 (10) 知,

$$F(x'', y', \lambda_{n_0}) \subset C + \varepsilon' e + F(x', y_0, \lambda_0) \quad (18)$$

由 (17) 与 (18) 知, $F(x'', y', \lambda_{n_0}) \subset C, \forall y' \in H(\mu_{n_0})$ 。因此, $x'' \in M(\lambda_{n_0}, \mu_{n_0})$ 。

再由 (2)、(9) 与 (16) 知,

$$x'' \in x' + V_1 \cap W_1 \subset x_0 + W_1 + W_1 \subset x_0 + W_0$$

所以, $(x_0 + W_0) \cap M(\lambda_{n_0}, \mu_{n_0}) \neq \emptyset$, 这与 (1)

矛盾。故 $M(\cdot, \cdot)$ 在 (λ_0, μ_0) 处下半连续。

参考文献:

- [1] Fu J F. Vector equilibrium problems, existence theorems and convexity of solution set[J]. J Glob Optim, 2005, 31(1):109-119.
- [2] Song W. Vector equilibrium problems with set-valued mapping[A]. In: Giannessi F. Variational inequalities and vector equilibria[C]. Dordrecht, Netherlands Kluwer, 2000, 38(2):403-418.
- [3] Ansari Q H, Oettli W, Schlaer D. Generalization of vector equilibria[J]. Math Meth Oper Res, 1997, 46(2): 147-152.
- [4] Huang N J, Li J, Thompson H B. Stability for parametric implicit vector equilibrium problems[J]. Math Comput Model, 2006, 43(11): 1267-1274.
- [5] Gong X H, Yao J C. Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems[J]. J Optim Theory Appl., 2008, 138(2):197-205.
- [6] Chen C R, Li S J, Teo K L. Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems[J]. J Glob Optim, 2009, 45(2):309-318.
- [7] Chen B, Gong X H. Continuity of the solution set to parametric set-valued weak vector equilibrium problems [J]. Pacific J Optim, 2010, 6(4): 511-520.
- [8] Chen C R, Li S J. On the solution continuity of parametric generalized systems[J]. Pacific J Optim. 2010, 6(1): 141-151.
- [9] Peng Z Y, Chang S S. On the lower semicontinuity of the set of efficient solutions to parametric generalized systems[J]. Optim Lett, 2014, 8(1):159-169.
- [10] Peng Z Y, Lin Z, Yu K Z, et al. A note on solution lower semicontinuity for parametric generalized vector equilibrium problems[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014(1):1-10.
- [11] Li S J, Liu H M, Zhang Y, et al. Continuity of the solution mappings to parametric generalized strong vector equilibrium problems[J]. J Glob Optim, 2013, 55(17):597-610.
- [12] Rabian W, Panatda B, Pakkapon P. Lower semicontinuity of approximate solution mappings to parametric generalized vector equilibrium problems[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014(1):1-9.
- [13] Han Y, Gong X H. Lower semicontinuity of solution mapping to parametric generalized strong vector equilibrium problems[J]. Appl Math Lett., 2014, 28(2): 38-41.
- [14] Fu J Y. Generalized vector quasi-equilibrium problems[J]. Math Methods Oper Res., 2000, 52(1): 57-64.
- [15] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.