文章编号: 1674-8085(2020)04-0014-07

光波偏振态的相干矩阵表示及变换的研究

黄 艳

(漳州职业技术学院电子工程学院,福建,漳州 363000)

摘 要:为从物理本质上揭示光波偏振态、偏振的叠加、混合和传播等概念和应用,利用相干矩阵方法分析光波偏振态。深入探讨了几种特殊意义情况下光波相干矩阵的特点及其可能的合成方式。选择部分偏振态通过线性光学元 件和以布儒斯特角入射介质分界面时透射光偏振特性分析的典型例子,揭示了光波偏振态的变换问题。并在邦加球 中以图解形式表示光波偏振态的几种合成形式及相干矩阵传输前后的偏振态变换。图解法使物理量的代数表示几何 化,能更形象地描述偏振态的物理意义。分析表明,完全描述光波的偏振特性需要相干矩阵的本征值和本征态共同 表征。

关键词:物理光学;偏振态;相干矩阵;偏振度;邦加球;本征值 中图分类号:O436.3 文献标识码:A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2020.04.004

RESEARCH ON COHERENCE MATRIX REPRESENTATION AND TRANSFORMATION OF POLARIZATION STATE OF LIGHT WAVES

HUANG Yan

(Electronic Engineering Department, Zhangzhou Institute of Technology, Zhangzhou, Fujian 363000, China)

Abstract: In order to reveal the polarization state of light waves, the superposition, mixing and propagation of polarization from the physical essence, the coherent matrix method is used to analyze the polarization state of light waves. The characteristics of light wave coherence matrices in several special cases and their possible synthesis methods are discussed in depth. Through the typical examples of partially polarized states passing through linear optical elements and the examples of analysis of polarization characteristics of transmitted light when incident at the Brewster angle, the transformation of the polarization state of light waves is revealed. Several synthetic forms of polarization of light waves and the polarization state transition after coherent matrix transmission are graphically represented in Poincare sphere. The graphical method makes the algebraic representation of physical quantities geometric and describes the physical meaning of polarization more vividly. It is shown that the eigenvalues and eigenstates of the coherence matrix are needed to fully describe the polarization characteristics of light waves.

Key words: Physical optics; The state of polarization; Coherence Matrix; Degree of polarization; Poincare sphere; Eigenvalue

0 引言

近年来,随着激光技术的发展,光学的应用范 围急剧扩大,其中偏振光技术作为一种重要的测量 手段越来越受到人们的重视^[1-5]。面对偏振光技术日 新月异的发展,需对偏振光知识有本质的理解,如 何描述光的偏振态及变换是偏振光技术应用的基 础。目前,大学众多光学教材中对光的偏振现象的 描述主要是从现象出发的定性描述,然后以两个波

收稿日期: 2020-01-15; 修改日期: 2020-04-01

基金项目: 漳州市自然科学基金项目(ZZ2019J24).

作者简介: 黄 艳(1983-), 女, 福建闽清人, 讲师, 硕士, 主要从事光学晶体偏振特性及偏光器件设计方面的研究(E-mail:huangyan_013@126.com).

叠加为基础的定义,强调通过两波的位相差来区分 各种类型光的偏振状态^[6-7]。其好处在于直观形象、 便于理解,不足之处是对自然光、完全偏振光和部 分偏振光的本质区别、偏振的各向异性等概念极不 清楚。

如所周知,光的相干性起源于光辐射的随机性 导致诸参与叠加光波相位差的随机性。偏振的多样 性也是来自于光源辐射的随机性,只是取决于二维 平面上两个正交基的相位差的随机性。所以偏振的 可观测量是一种统计系综描述,在二维理论中通常 用相干矩阵表示,类似于统计物理学中的混态或密 度矩阵,其特征之一是含糊性,即一种确定的偏振 态对应的起因可以有无数种^[8]。另有一种与之表示 等价的是斯托克斯理论,其几何表象是三维邦加球 坐标系^[9]。两种方法在光学的高级教程或专著中都 有详细的论述,但是很少看到具体应用的描述和例 子,所以使初学者在看完理论后仍停留在抽象的概 念中,不能真正理解其中的物理本质。

本文采用二维相干矩阵法详细分析了光波的 偏振性质,并给出几种特殊意义情况下光波相干矩 阵的特点及其可能的合成方式。选择部分偏振态通 过线性光学元件和以布儒斯特角入射介质分界面 时透射光偏振特性分析作为典型例子,揭示了光波 偏振态的变换问题,并将光波的偏振状态的几种合 成形式及传输后的变换在邦加球坐标系中以图解 形式表示。图解法使物理量的代数表示几何化,让 读者能够从物理本质上体会光波本征解、偏振的叠 加、混合和传播等概念和应用。

1 偏振态的相干矩阵描述

矩阵光学是将数学矩阵方法应用于光学研究, 对描述和解决一些繁琐的光学问题,例如几何光学 计算、薄膜干涉研究等,提供了一种方便和有效的 方法。1941年美国物理学家琼斯提出了用一个列矩 阵来表示光矢量的两个分量的方法,这矩阵称之为 琼斯矢量^[10]。光学元件的传输矩阵对应地采用 2×2 的琼斯矩阵来表示,利用琼斯矩阵法可方便计算偏 振光通过不同组合的偏振光学元件后出射光的偏 振状态。然而,在涉及到部分偏振光问题时,由于 琼斯矢量不能表示位相随时间变化的自然光和部 分偏振光,于是又发展了二维相干矩阵,为系统分析准单色光的偏振状态提供了一种有效方法^[8]。

准单色光波场矢量的变化既不是完全规则的, 又不是完全不规则的,显现出部分偏振的特点。研 究此类光场的偏振特性需引入相干矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \left\langle E_{x}E_{x}^{*}\right\rangle & \left\langle E_{x}E_{y}^{*}\right\rangle \\ \left\langle E_{y}E_{x}^{*}\right\rangle & \left\langle E_{y}E_{y}^{*}\right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle a_{1}^{2}\right\rangle & \left\langle a_{1}a_{2}e^{i\delta}\right\rangle \\ \left\langle a_{1}a_{2}e^{-i\delta}\right\rangle & \left\langle a_{2}^{2}\right\rangle \end{bmatrix}$$

$$(1)$$

式 (1) 中假设振幅相关与相位相关统计独立, 则 $\langle a_1 a_2 e^{i\delta} \rangle = \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{i\delta} \rangle$,式 (1) 可化为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1^2 \rangle & \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{i\delta} \rangle \\ \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{-i\delta} \rangle & \langle a_2^2 \rangle \end{bmatrix}$$
(2)

J 称为光波的相干矩阵,其中矩阵的迹 TrJ 即其对 角元之和为光的总强度

$$\Gamma r \boldsymbol{J} = J_{xx} + J_{yy} \tag{3}$$

相干矩阵 *J* 的非对角元是复数,且彼此共轭 $J_{xy} = J_{yx}^*$,即相干矩阵是厄密矩阵。在幺正变换下 矩阵的迹 *TrJ* 保持不变,所以相干矩阵 *J* 的矩阵元 具有 3 个独立分量^[11]。

相干矩阵J的本征方程可写为

$$\boldsymbol{J}\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\lambda}\widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{4}$$

其中 λ 为相干矩阵J的本征值, \tilde{E} 为对应的本征函数。将本征方程(4)式写成矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix} \langle a_1^2 \rangle - \lambda & \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{i\delta} \rangle \\ \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{-i\delta} \rangle & \langle a_2^2 \rangle - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

现求相干矩阵 J 的本征值 λ ,列出矩阵的久期 方程为^[12]

$$\begin{vmatrix} \langle a_1^2 \rangle - \lambda & \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{i\delta} \rangle \\ \langle a_1 a_2 \rangle \langle e^{-i\delta} \rangle & \langle a_2^2 \rangle - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
(6)

求得两个非零本征值

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \bigg[\left(\left\langle a_1^2 \right\rangle + \left\langle a_2^2 \right\rangle \right) \pm \sqrt{\left(\left\langle a_1^2 \right\rangle - \left\langle a_2^2 \right\rangle \right)^2 + 4 \left\langle a_1 a_2 \right\rangle^2 \left\langle e^{-i\delta} \right\rangle \left\langle e^{i\delta} \right\rangle} \bigg]$$
(7)

当相位差不恒定而呈现一定的随机性时,根号中的 最后一项 $\langle e^{-i\delta} \rangle \langle e^{i\delta} \rangle$ 值域为(0,1),不可抵消。将两 本征值 λ_1 , λ_2 分别代回本征方程(5)式得到对应 的本征解

$$\frac{\widetilde{E_{1x}}}{\widetilde{E_{1y}}} = \frac{2\langle a_{1}a_{2}\rangle\langle e^{i\delta}\rangle}{\langle a_{2}^{2}\rangle - \langle a_{1}^{2}\rangle + \sqrt{(\langle a_{1}^{2}\rangle - \langle a_{2}^{2}\rangle)^{2} + 4\langle a_{1}a_{2}\rangle^{2}\langle e^{-i\delta}\rangle\langle e^{i\delta}\rangle}}$$

$$\frac{\widetilde{E_{2x}}}{\widetilde{E_{2y}}} = \frac{2\langle a_{1}a_{2}\rangle\langle e^{i\delta}\rangle}{\langle a_{2}^{2}\rangle - \langle a_{1}^{2}\rangle - \sqrt{(\langle a_{1}^{2}\rangle - \langle a_{2}^{2}\rangle)^{2} + 4\langle a_{1}a_{2}\rangle^{2}\langle e^{-i\delta}\rangle\langle e^{i\delta}\rangle}}$$

$$(9)$$

以上两式含有复量, 故这对本征态一般互为正交的 椭圆偏振态,在这组态基下,相干矩阵是对角化的, 即

$$\boldsymbol{J'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
(10)

本征值与本征态的物理意义在于:本征态是描 述偏振的最基础态,一定是偏振的,且属于不同本 征值的本征态是正交且不相干的,相应的本征值表 示光处于该本征态的强度。

现分析三种特殊意义情况下对角化相干矩阵 的形式:

1) 当本征值是重根时λ,=λ,,两本征态是简并 的,任何一对正交基都可以作为本征态,任意两个 正交分量互不相干,这对应于完全非偏振光,即通 常所说的自然光。换句话说,自然光可等量地分解 成任何一对正交态的混合。因此,单位强度的自然 光的相干矩阵形式是单位矩阵,如下式所示

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(11)

在邦加球中由球心表示。

2) 当非零本征值是单根时,所对应的本征态 代表完全偏振态

$$\boldsymbol{J}_{1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$
(12)

由邦加球面上的点表示。

例如,电矢量在x方向和y方向上单位强度的 线偏振光矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Re \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(13)

3)当两个本征值不等时 $\lambda \neq \lambda$,表示部分偏 振态,在邦加球中由球内的一个点表示。通过该点

和球心的直径两端代表这两个本征态,如图2中的 J₁,J₂点,仅仅这对本征态是互不相干的。

一个部分偏振态可按比例 λ1、λ2分解成两个正 交本征态的非相干混合,即

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
(14)

还可将相干矩阵写成如下形式

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (15)$$

(15) 式的物理意义是, 一个部分偏振态可按特定 比例分解成一个自然光与本征态的非相干混合,非 相干混合即为两个偏振态的相干矩阵相加

I = I + I

$$J - J_1 + J_N$$

其中 $J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 为本征态即全偏振分量,这个
本 征 态 一 定 是 较 大 的 本 征 值 所 对 应 的 ,
$$J_N = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
表示自然光分量。自然地将偏振度定
义为偏振部分强度与总强度的比值,即

$$P = \frac{I_{\text{mff}}}{I_{\vec{\&}}} = \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right|$$
(16)

很显然偏振度 P 满足条件 $0 \leq P \leq 1$ 。

从偏振度 P 定义(16)式可见,对于自然光, 两个本征值λ=λ, 其偏振度为 P=0, 波是完全非 偏振的;对于偏振光,相干矩阵只有一个非零本征 值,偏振度 P=1,波是完全偏振的;对于部分偏振 光,本征值 $\lambda_{i} \neq \lambda_{j}$,偏振度 0<P<1。显然,P 表 示部分偏振态与球心的距离,所以部分偏振态有 3 个分量, P=1 所代表的完全偏振态只有 2 个分量。

偏振度P只是反映了部分偏振光中完全偏振分 量所占据的权重,只由本征值决定,并没有完全描 述其偏振性质。例如具有同样偏振度的两个部分偏 振光,它们的本征态可以是不一样的,完全描述光 波的偏振性质需要相干矩阵的本征值和本征态,后 面将通过实例进行说明。

光波偏振特性的邦加球描述 2

1892 年邦加(H.Poincare)提出运用邦加球分

析光的偏振态,球半径代表光强大小,球面上的点 代表完全偏振光;球心处表示完全非偏振光(自然 光);球内的点表示部分偏振光。下面运用邦加球 分析光波的几种偏振态图示表示,这里我们仅对光 波的偏振状态感兴趣,即考虑单位强度的光,因此下 列图示中的邦加球均是归一化的,邦加球半径为1。

2.1 部分偏振光的混合

2.1.1 部分偏振光按本征态与自然光非相干混合

如前所述,对部分偏振光,可把该光波按特定 比例分解成一个本征态与自然光的非相干混合 $J = J_1 + J_N$ 。从偏振度P定义(16)式可见偏振度 描述的是完全偏振分量与光波总强度的比值,即偏 振度P的值从非偏振光情况下的零到完全偏振光情 况下的1之间变化。对于归一化的邦加球(单位半 径)而言,半径上某点离球心的距离可以用来表示 该部分偏振光的偏振度,而半径与球面的交点则表 示该部分偏振光的偏振度,而半径与球面的交点则表 示该部分偏振光中的全偏振分量 J_1 。因此其在归一 化邦加球中的图解如图1(a)所示,J点表示由对 应的完全偏振光 J_1 和自然光 J_N 合成的部分偏振光在 邦加球上的表示。这里仅需知道完全偏振光 J_1 在邦 加球面上的位置,即可确定该部分偏振光,图中 $\overline{JJ_1} = 2\lambda_2$, $\overline{J_NJ} = P$ 。

2.1.2 部分偏振光按两正交本征态非相干混合

如前所述,一个部分偏振态可按比例λ₁、λ₂分 解成两个正交本征态的非相干混合,如(14)式所示

 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ 其中 $\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 分别为偏振态相互

正交的本征态。这里仅需确定两正交本征态在邦加 球面上的位置,且按照两本征态本征值大小比例, 即可确定部分偏振态的位置。如图1(b)所示,图 中 $\overline{JJ_1} = 2\lambda_2$, $\overline{J_2J} = 2\lambda_1$ 。

2.1.3 部分偏振光按任意两偏振态非相干混合

前面提到的相干矩阵的两种分解方式是最常见和实用的,表示两种态的非相干混合,原则上相 干矩阵可以视为任意两个偏振态的非相干混合,这 是相干矩阵作为统计描述的一种含糊性,因此这种 分解方式可以有无数种,即

$$J = C_1 J_1' + C_2 J_2'$$
(17)

其中, J_1 , J_2 分别为任意两个完全偏振态,这两个 偏振态可是相干的或是部分相干的, C_1 , C_2 为比例 系数,三者在邦加球中表示如图 1 (c)所示,图中 $\overline{J_1J} = C_2$, $\overline{JJ_2} = C_1$ 。

2.2 完全偏振光按两正交本征态相干叠加

完全偏振光有线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振 光,在邦加球中用球面上的每一点表示一椭圆偏振 光,北半球为右旋态,南半球为左旋态,在北极和 南极演化为右旋和左旋圆偏振光,赤道上退化为线 偏振光。完全偏振光也可看做由一对偏振态互相正 交的本征态相干叠加,这种分解方式也可以有无数 种,即

$$\vec{E} = C_1 \vec{E}_1 + C_2 \vec{E}_2 \tag{18}$$

其中, \vec{E} 为完全偏振光的琼斯矢量, \vec{E}_1 , \vec{E}_2 分别 为一对偏振态相互正交的本征态的琼斯矢量, 二者 互不相干,构成一归一正交完备基底, C_1 , C_2 为琼 斯矢量在该正交基底中的坐标分量。三者在邦加球 中表示如图 1(d)所示,图中 $\overline{E_1E} = |C_2|$, $\overline{EE_2} = |C_1|$ 。



(a)部分偏振光按偏振光(强本征态)与自然光非相干混合 在邦加球中的表示



(b) 部分偏振光按两正交本征态非相干混合在邦加球中的表示



(c)部分偏振光按任意两偏振态正相干混合在邦加球中的表示



(d)完全偏振光按两正交本征态相干叠加在邦加球中的表示
 图 1 光波偏振特性在邦加球中的表示
 Fig.1 Representation of polarization characteristics of light waves in Poincare sphere

3 光波偏振态的变换

3.1 部分偏振态通过线性光学元件后的变换

偏振光学元件对偏振态改变通常是线性的,可 用 2×2 的琼斯矩阵表示,其作用于前面所述相干 矩阵,可描述部分偏振态通过线性光学元件后偏振 态的改变。相干矩阵经过线性光学元件后的变换可 表示为

$$\boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{L}^{\dagger} \boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{L} \tag{19}$$

 J_1 表示入射光的相干矩阵, J_2 表示出射光的相干矩阵,L表示线性光学元件的琼斯矩阵, L^{\dagger} 表示L的 共轭转置。

线性光学元件通常分为两大类,一类是无损耗 的,如波晶片、旋光器等,其琼斯矩阵是幺正的; 另一类是有损耗的,例如起偏器(包括线偏振器和 圆偏振器),其琼斯矩阵是非幺正的。

3.1.1 无损光学元件

对无损光学元件而言, 其琼斯矩阵是幺正的,

根据矩阵代数,幺正变换不改变本征值,但一旦经 过变换则会改变相干矩阵和本征态。以快轴在x方 向的 1/4 波片为例,它将入射光的相干矩阵J₁改变 为出射光的相干矩阵J₂,即

设入射光相干矩阵
$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$
的本征值为 λ ,

则入射光相干矩阵 J1 的久期方程为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -i\\ i & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

求得入射光相干矩阵 J_1 的本征值为 λ_1 =3, λ_2 =1。 现求不同本征值对应的本征态。

本征值为λ₁=3时,对应的本征态可通过求解齐 次方程组(22)式得

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -i \\ i & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$$
(22)

则本征值 $\lambda_1 = 3$ 对应的本征态为 $\overline{E_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

为归一化系数,对应的本征态为右旋圆偏振光。 同理求得本征值为λ,=1对应的本征态为

$$\vec{E_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$
,对应的本状态为左旋圆偏振光。

相同的方法可求得出射光相干矩阵 $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的本征值也为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, 对应的本 征态分别为 $\overrightarrow{E_{45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\overrightarrow{E_{-45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 分别代

本征态经快轴在 x 方向的 1/4 波片后的变化如下

$$\overrightarrow{E_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{E_{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\ -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{A}_{\underline{\lambda}}} \underbrace{\mathbb{E}_{\underline{A}} \mathbb{E}_{\underline{A}}}_{\underline{A}} \underbrace{\mathbb{E}_{\underline{A}}}_{\underline{A}} \underbrace{\mathbb{E}_{\underline{A}}}_{\underline{A}} \underbrace{\mathbb{E}_{\underline{A}}}_{\underline{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\ -1 \end{bmatrix}$$
(23)

可见 1/4 波片使得左右旋圆偏振态变成了旋转了 ±45°的线偏振态。

从以上例子可以看到,入射光和出射光的本征 值均相等,因此偏振度经过 1/4 波片前后保持不变。 但从分析可知入射光和出射光的偏振特性完全不 一样,因经过 1/4 波片后改变了部分偏振光的本征 态。因此,完全描述光波的偏振性质需要相干矩阵 的本征值和本征态。

3.1.2 有损光学元件

对于有损光学元件偏振片而言,由于改变了入射光的强度和偏振态,因此输出的出射光相干矩阵的迹、本征值和偏振度等都将发生变化。例如上述部分偏振光 $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ 通过透振方向为x方向的起

偏器后出射光的相干矩阵为

 $\boldsymbol{J}_{2} = L^{+} \boldsymbol{J}_{1} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (24)

从(24)式可见,输出光为电矢量在 x 方向的线偏 振态 E₀,由于偏振滤波作用光的总强度减小了。上 述两种部分偏振态通过光学元件的情况在邦加球 上表示如图 2 所示,其中



(晶体快轴在x轴方向、线偏振器透振方向在x轴方向)

图 2 光经 1/4 波片及线偏器的邦加球表示 Fig. 2 Representation of light passing through 1/4 wave plate and line polarizer in Poincare sphere

3.2 布儒斯特角入射介质分界面时透射光的偏振 特性

3.2.1 自然光入射

当自然光以布儒斯特角*i*_B入射在介质 1 和介质 2 的分界面上时,此时与入射面平行的P分量 100% 透过,因此反射光中只有与入射面垂直的s分量,则 反射光为线偏振光,其相干矩阵

$$J_R = J_s \tag{25}$$

设*s*波的振幅反射率为α,透射光为部分偏振光,其 相干矩阵

$$J_{T} = \frac{1 - \alpha^{2}}{2 - \alpha^{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2 - \alpha^{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(26)

如前所述,该透射光部分偏振态可按两正交偏 振态 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,即电矢量在x方向和y方向上 单位强度的线偏振光非相干混合。且按照两本征态 本征值大小比例,即可确定部分偏振态的位置。如 图 3 (a)所示,图中 $\overline{J_sJ_T} = 2\lambda_p$, $\overline{J_TJ_p} = 2\lambda_s$,其 中两本征态对应的本征值大小分别为

$$\lambda_p = \frac{1}{2-\alpha^2}, \quad \lambda_s = \frac{1-\alpha^2}{2-\alpha^2}.$$

3.2.2 圆偏振光入射

当圆偏振光以布儒斯特角*i*_B入射在介质 1 和介 质 2 的分界面上时,与入射面平行的P分量 100%透 过,与入射面垂直的s分量部分反射、部分透射。如 前所述,完全偏振光也可看做由一对偏振态互相正 交的本征态相干叠加,因此在*E*_s和*E*_p这对正交态 基下,则透射光振幅是P波振幅与s波振幅的相干叠 加。设s波的振幅反射率为α,则

$$\overrightarrow{E_T} = C_s \overrightarrow{E_s} + C_p \overrightarrow{E_p}$$
(27)

式中
$$C_s = \frac{1-\alpha}{\sqrt{1+(1-\alpha)^2}}$$
, $C_p = \frac{1}{\sqrt{1+(1-\alpha)^2}}$ 分别为

琼斯矢量在该正交基底中的坐标分量。其在邦加球 中的图解如图 3(b)所示,其中 $\overline{E_sE_T} = |C_p|$, $\overline{E_rE_p} = |C_s|$ 。



(a) 自然光以布儒斯特角入射介质界面后透射光偏振态的邦加球表示



(b)圆偏振光以布儒斯特解入射介质界百后透射光偏振态的邦中球表示

图 3 布儒斯特角入射介质分界面时透射光的偏振特性在 邦加球中的表示

Fig. 3 Representation of the polarization characteristics of transmitted light passing through the interface between two different media at Brewster angle in Poincare sphere

4 结论

本文论述偏振光的二维相干矩阵理论,并将光 波的几种偏振状态在邦加球坐标系中以图解形式 表示。图解法使物理量的代数表示几何化,能更形 象地描述偏振态的物理意义,如部分偏振态的非相 干混合、偏振态的叠加和部分偏振态经线性元件的 传输变换等。文中辅以几个典型例子说明相干矩 阵、本征态和相应图解法的构造、求解和应用。关 于部分偏振光的几个结论。 1)完全偏振态在邦加球表面,由两个独立参数决定;在邦加球球内的点表示部分偏振光,由3
 个独立参数决定;邦加球球心处,表示完全非偏振光(自然光);

2)一对正交偏振态(在邦加球任直径两端) 的非相干混合是部分偏振态(杠杆法则),相干叠 加是偏振态(直角三角形法则)。

3)与偏振态的矢量分解类似,以相干矩阵表述的部分偏振态的分解有无数种方式,但重要的是按本征态分解,或者按自然光与本征值较大的态分解。

参考文献:

- [1] 孙仲秋,赵云升,阎国倩,等.利用偏振光技术计算海 水密度的深入研究[J].学学报,2010,30(8): 2451-2457.
- [2] 王玉波,杨江涛,唐军,等. 基于大气偏振光的航向角 探测系统[J].兵器装备工程学报,2019,40(3):127-131.
- [3] 张志刚,毛亮,程腾,等.利用消杂散光的偏振光技术提高光学读出红外成像检测灵敏度[J].红外与毫米波学报,2013,32(4):331-336.
- [4] 马号,熊剑,郭杭,等. 基于大气偏振光特性辅助定向 的自主导航方法[J].应用光学,2016,37(2):162-167.
- [5] 于洵,杨烨,姜旭,等. 基于偏振光谱成像的目标识别 方法研究[J].应用光学,2016,37(4):537-541.
- [6] 姚启钧.光学教程[M].北京:高等教育出版社,2002: 304-317.
- [7] 赵凯华. 新概念物理教程:光学[M]. 北京: 高等教育 出版社,2004:270-276.
- [8] 玻恩 M, 沃耳夫 E.光学原理(下册)[M].黄乐天,陈熙 谋,陈秉乾,译.2 版. 北京:科学出版社,1981:721,728.
- [9] 廖延彪.偏振光学[M].北京:科学出版社,2003:52-56.
- [10] 钟锡华.现代光学基础[M]. 北京:北京大学出版社, 2003:427-430.
- [11] 李高明,邱怡申. 传统偏振光检验法的局限性及其修 正[J].福建师范大学学报:自然科学版,2012,28(6): 56-59.
- [12] 上海交通大学线性代数编写组. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社,1991:162-172.