

文章编号: 1674-8085(2020)04-0010-04

随机利率下保费随机收取的双险种风险模型

刘培江², 李 颖¹, 朱聿铭¹, *王浩华¹

(1. 海南大学理学院, 海南, 海口 570228; 2. 广东财经大学统计与数学学院, 广东, 广州 510320)

摘 要: 首先建立了带随机利率、通货膨胀率和干扰项的双险种风险模型, 对保费收取和理赔次数都是随机变量的情况, 最后得到破产概率的一般表达式。

关键词: 随机利率; 通货膨胀率; 双险种; Brown 运动; 破产概率

中图分类号: F840

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2020.04.003

RISK MODEL OF DOUBLE LINE OF RANDOM PREMIUM INCOME UNDER STOCHASTIC INTEREST

LIU Pei-jiang², LI Ying¹, ZHU Yu-min¹, *WANG Hao-hua¹

(1. School of Sciences, Hainan University, Haikou, Hainan 570228, China

2. School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou, Guangdong 510320, China)

Abstract: In this paper, a risk model of double lines with stochastic interest, inflation rate and interference is established. In case the premiums and the claims are random variables, the formulas of the ruin probability are obtained.

Key words: stochastic interest; inflation rate; double line; Brown motion; ruin probability

0 引言

在经典风险理论中, 风险过程的平稳独立增量性假设, 对于保险公司的盈余分析和风险模型的研究都是一个重要的条件^[1-2]。然而在风险运作过程中, 这个假设条件过于理想化, 不符合保险公司的经营实际。在实际金融环境中, 大量的保险业问题是包含利息等经济环境因素的, 没有考虑利率因素影响的风险模型只能是一种理想化的模型。因此, 有必要研究利率因素对保险公司的影响。在某些条件下, 利率产生的风险比赔付产生的风险更大。因而不考虑利率可能会带来与实

际值之间的较大偏差, 同时在现实的保险金融市场上, 除了理赔的不确定性外, 还存在由于市场通货膨胀等因素引起的不确定性, 所以有必要在建立的模型中加以考虑^[3-4]。为了减少不确定性, 一种较好的方法就是采用随机利率模型^[4]。随着保险公司风险经营的规模的不断扩大, 险种的多元化及新险种的不断开发, 用单一险种的模型来描述风险过程的局限性越来越明显, 因而有必要建立多险种风险模型。

1 模型建立

在考虑随机利率、通货膨胀率因素的情况下,

收稿日期: 2020-03-31; 修改日期: 2020-06-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(11761025, 11901114); 广东省教育厅青年创新人才类项目(2017KQNCX081); 广州市科技创新一般项目(201904010010)

作者简介: 刘培江(1989-), 男, 河南信阳人, 讲师, 博士, 主要从事应用数学研究(E-mail:liupj@gdufe.edu.cn);

李 颖(1996-), 女, 重庆人, 硕士生, 主要从事应用数学研究(E-mail:562226028@qq.com);

朱聿铭(1979-), 男, 海南海口人, 硕士生, 主要从事应用数学研究(E-mail:125446187@qq.com);

*王浩华(1981-), 男, 湖北天门人, 教授, 博士, 主要从事应用数学研究(E-mail:huazi8112@hainanu.edu.cn)。

影响保险公司盈余的因素有保费收入、利息收入及赔款支出,相应的模型即保险公司的盈余过程为:

$$U(t) = (u + S(t))(1 + I - J) - W(t) + \delta B(t) \quad (1)$$

其中: $U(t)$ 为 t 时刻保险公司总的盈余;

$U(0) = u$ 为初始时刻资本;

I 表示随机利率且 $E(I) = i$;

J 表示通货膨胀率,也是随机变量且 $E(J) = j$;

$B(t)$ 为标准的布朗运动, $\delta > 0$ 为扰动系数;

$S(t) = \sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{M_z(t)} X_k^{(z)}$ 表示双险种到时刻 t 的总保费;

$W(t) = \sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{N_z(t)} Y_k^{(z)}$ 表示双险种到时刻 t 的总理赔量;

$X_k^{(z)}$ ($z=1,2$) 表示第 z 种险种第 k 次保单到达时收取的保费;

$Y_k^{(z)}$ ($z=1,2$) 表示第 z 种险种第 k 次的理赔量;

$M_z(t)$ ($z=1,2$) 表示第 z 种险种 $[0,t]$ 内收到的保单总数;

$N_z(t)$ ($z=1,2$) 表示第 z 种险种在 $[0,t]$ 内发生的理赔数;且 $\{X_k^{(z)}; k \geq 1\}, \{Y_k^{(z)}; k \geq 1\}, \{M_z(t); t \geq 0\}, \{N_z(t); t \geq 0\} (j=1,2)$ 两两相互独立。

对上述模型作如下假设:

1) $\{M_z(t); t \geq 0\}, \{N_z(t); t \geq 0\}$ 是独立的 Poisson 过程,其强度分别为 λ_z 和 μ_z , 且 $M_z(0) = 0, N_z(0) = 0$ ($z=1,2$);

2) $X_z = \{X_k^{(z)}; k \geq 1\}, Y_z = \{Y_k^{(z)}; k \geq 1\}$ 是相互独立同分布的非负随机序列,其分布函数分别为 $F_z(x), F_z(y)$ 且 $E(X_z) = p_z, E(Y_z) = q_z$ ($z=1,2$)。

记 $T = \inf\{t \geq 0; U(t) < 0\}$ 为破产时刻;

$\psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\} = P\{U(t) < 0, \exists t \geq 0\}$ 为初始准备金 u 的破产概率;

记 $V(t) = S(t)(1 + I - J) - W(t) + \delta B(t)$, 由独

立性可知:

$$\begin{aligned} E(V(t)) &= E[S(t)(1 + I - J) - W(t) + \delta B(t)] = \\ &= E(S(t))(1 + i - j) - E(W(t)) = \\ &= [(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(1 + i - j) - (\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2)]t \end{aligned} \quad (2)$$

为了保险公司的稳定经营,要求 $E(V(t)) > 0$, 即单位时间内保费收入大于理赔额^[2-3], 由此定义安全负荷系数为 $\rho = \frac{(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(1 + i - j)}{(\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2)} - 1$, 显

然当 $\rho \leq 0$ 时, $\psi(u) = 1$, 破产必然发生。因此, 以下假设 $\rho > 0$ 。

2 破产概率

引理 1 $V(t)$ 具有以下性质^[5-6]:

- 1) $V(0) = 0$;
- 2) $\{V(t)\}$ 具有平稳的独立增量;
- 3) $E(V(t)) > 0$;
- 4) 存在正数 r , 使得 $V(t)$ 的矩母函数

$E(e^{-rV(t)}) < \infty$ 。

引理 2 对于 $\{V(t); t \geq 0\}$, 存在函数

$$\begin{aligned} g(r) &= \lambda_1(M_{X_1}(-(1+i-j)r-1)) + \\ &\quad \lambda_2(M_{X_2}(-(1+i-j)r-1)) + \mu_1(M_{Y_1}(r)-1) + \\ &\quad \mu_2(M_{Y_2}(r)-1) + \frac{1}{2}r^2\delta^2 \end{aligned}$$

其中 $M_{X_z}(-(1+i-j)r) = E[e^{-(1+i-j)rX_z}]$,

$$M_{Y_z}(r) = E[e^{rY_z}], \quad (z=1,2)$$

使得 $E(e^{-rV(t)}) = e^{tg(r)}$ 。

证明:

$$\begin{aligned} E(e^{-rV(t)}) &= E\{\exp[-rS(t)(1+I-J) + rW(t) - r\delta B(t)]\} = \\ &= E\{\exp[-r\sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{M_z(t)} X_k^{(z)}(1+I-J) + r\sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{N_z(t)} Y_k^{(z)} - r\delta B(t)]\} = \\ &= \exp\{[\lambda_1(M_{X_1}(-(1+i-j)r-1)) + \lambda_2(M_{X_2}(-(1+i-j)r-1)) + \\ &\quad \mu_1(M_{Y_1}(r)-1) + \mu_2(M_{Y_2}(r)-1) + \frac{1}{2}r^2\delta^2]t\} = e^{tg(r)} \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} g(r) &= \lambda_1(M_{X_1}(-(1+i-j)r-1)) + \\ &\quad \lambda_2(M_{X_2}(-(1+i-j)r-1)) + \end{aligned}$$

$$\mu_1(M_{Y_1}(r)-1)+\mu_2(M_{Y_2}(r)-1)+\frac{1}{2}r^2\delta^2M_{X_2}(-(1+i-j)r)=E(e^{-(1+i-j)rX_2}),$$

$$M_{X_z}(r)=E(e^{rX_z}) (z=1,2).$$

引理 3 方程 $g(r)=0$ 存在唯一正根 R ，称为调节系数。

证明：由

$$\begin{aligned} g(r) &= \lambda_1(M_{X_1}(-(1+i-j)r-1)) + \\ &\quad \lambda_2(M_{X_2}(-(1+i-j)r-1)) + \\ &\quad \mu_1(M_{Y_1}(r)-1) + \mu_2(M_{Y_2}(r)-1) + \frac{1}{2}r^2\delta^2 \end{aligned} \quad (4)$$

可知： $g(0)=0$ ，因而有

$$\begin{aligned} g'(r) &= \lambda_1 M'_{X_1}(-(1+i-j)r) + \lambda_2 M'_{X_2}(-(1+i-j)r) + \\ &\quad \mu_1 M'_{Y_1}(r) + \mu_2 M'_{Y_2}(r) + r\delta^2 = \\ &\quad \lambda_1 E[-(1+i-j)X_1 e^{-(1+i-j)rX_1}] + \\ &\quad \lambda_2 E[-(1+i-j)X_2 e^{-(1+i-j)rX_2}] + \\ &\quad \mu_1 E(Y_1 e^{rY_1}) + \mu_2 E(Y_2 e^{rY_2}) + r\delta^2 \\ g'(0) &= \lambda_1 E[-(1+i-j)X_1] + \lambda_2 E[-(1+i-j)X_2] + \\ &\quad \mu_1 E(Y_1) + \mu_2 E(Y_2) = \\ &\quad -(1+i-j)(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) + (\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2) < 0 \\ g''(r) &= \lambda_1 M''_{X_1}(-(1+i-j)r) + \lambda_2 M''_{X_2}(-(1+i-j)r) + \\ &\quad \mu_1 M''_{Y_1}(r) + \mu_2 M''_{Y_2}(r) + \delta^2 = \\ &\quad \lambda_1 E[(1+i-j)^2 X_1^2 e^{-(1+i-j)rX_1}] + \\ &\quad \lambda_2 E[(1+i-j)^2 X_2^2 e^{-(1+i-j)rX_2}] + \\ &\quad \mu_1 E(Y_1^2 e^{rY_1}) + \mu_2 E(Y_2^2 e^{rY_2}) + \delta^2 \end{aligned}$$

显然有 $g''(r) > 0$ ，所以函数 $g'(r)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的单调递增函数，且 $g(r)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数，所以存在 $r_1 \in (0, \infty)$ ，使得 $g'(r_1) = 0$ ，因此存在 $R \in (0, \infty)$ ，使得 $g(R) = 0$ ，故函数在 $r > 0$ 时存在唯一正根 R 。

由上面引理可以得到：

定理 1 双风险模型的初始准备金为 u 的破产概率为

$$\psi(u) = \frac{E(e^{-R(1+I-J)u})}{E[e^{-RU(T)+Rt((I-i)-(J-j))} | T < \infty]},$$

R 为调节系数， $T = \inf\{t \geq 0; U(t) < 0\}$ 。

证明：对于 $t > 0$ 和 $r > 0$ ，可以考虑：

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(t)}] &= E[e^{-rU(t)} | T \leq t] P\{T \leq t\} + \\ &\quad E[e^{-rU(t)} | T > t] P\{T > t\} \triangleq Q_1 + Q_2 \end{aligned} \quad (5)$$

由

$$E[e^{-rU(t)}] = E[e^{-ru(1+I-J)-rV(t)}] = E[e^{-ru(1+I-J)+tg(r)}]$$

将 $U(t)$ 写成

$$\begin{aligned} U(t) &= U(T) + [U(t) - U(T)] = \\ &\quad U(T) + (S(t) - S(T))(1 + I - J) - \\ &\quad (W(t) - W(T)) + \delta(B(t) - B(T)) = \\ &\quad U(T) + (1 + I - J) \left(\sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{M_z(t)} X_k^{(z)} - \sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{M_z(T)} X_k^{(z)} \right) - \\ &\quad \left(\sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{N_z(t)} Y_k^{(z)} - \sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{N_z(T)} Y_k^{(z)} \right) + \delta(B(t) - B(T)) \end{aligned}$$

$$\text{对于给定的 } T, \quad \sum_{k=1}^{M_z(t)} X_k^{(z)} - \sum_{k=1}^{M_z(T)} X_k^{(z)},$$

$\sum_{k=1}^{N_z(t)} Y_k^{(z)} - \sum_{k=1}^{N_z(T)} Y_k^{(z)} (z=1,2)$ 与 $U(t)$ ， I ， J 是两两

独立的，且分别服从参数为 $\lambda_z(t-T)$ ， $\mu_z(t-T) (z=1,2)$ 的复合 Poisson 分布，由于 $B(t)$ 是标准的 Brown 运动，则有

$$B(t) - B(T) \sim N(0, t - T)$$

从而有

$$\begin{aligned} Q_1 &= E[e^{-rU(t)} | T \leq t] P\{T \leq t\} = \\ &\quad E[e^{-ru(1+I-J)+tg(r)} | T \leq t] P\{T \leq t\} \end{aligned} \quad (6)$$

利用引理，选取 $r = R$ ，即为调节系数，则有

$$E[e^{-RU(t)}] = E[e^{-Ru(1+I-J)}]$$

从而有

$$Q = E[\exp(-RU(T) - R(1 + I - J)) \cdot$$

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{M_z(t)} X_k^{(z)} - \sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{M_z(T)} X_k^{(z)} \right) - \\ &\quad R \left(\sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{N_z(t)} Y_k^{(z)} - \sum_{z=1}^2 \sum_{k=1}^{N_z(T)} Y_k^{(z)} \right) + \\ &\quad R\delta(B(t) - B(T)) | T \leq t] P\{T < t\} = \\ &\quad E[e^{-Rt((I-i)-(J-j))}] E[e^{-RU(T)+Rt((I-i)-(J-j))} | T \leq t] P\{T < t\} \rightarrow \\ &\quad E[e^{-Rt((I-i)-(J-j))}]. \\ &\quad E[e^{-RU(T)+Rt((I-i)-(J-j))} | T < \infty] \psi(u) (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\text{令 } \alpha t = E(V(t)), \quad \beta^2 t = \text{Var}(V(t)), \quad p^2 = \text{Var} I,$$

$$q^2 = \text{Var} J, \quad \text{Var}(B(t)) = \sigma^2$$

则

$$E(U(t)) = E(u(1+I-J) + V(t)) = u(1+i-j) + \alpha t,$$

$$Var(U(t)) = Var(u(1+I-J) + V(t)) =$$

$$u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2$$

因此, 考虑

$$\Delta = u(1+i-j) + \alpha t - [u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2]^{\frac{1}{3}}$$

显然当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\Delta > 0$ 。则有

$$Q_2 = E[e^{-rU(t)} | T > t] P\{T > t\} =$$

$$E[e^{-rU(t)} | T > t, 0 \leq U(t) \leq \Delta] P\{T > t, 0 \leq U(t) \leq \Delta\} +$$

$$E[e^{-rU(t)} | T > t, U(t) > \Delta] P\{T > t, U(t) > \Delta\} \leq$$

$$P\{U(t) \leq \Delta\} + e^{-R\Delta}$$

(7)

由 Chebyshev 不等式可知:

$$P\{U(t) \leq \Delta\} = P\{U(t) \leq u(1+i-j) + \alpha t -$$

$$[u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2]^{\frac{1}{3}}\} =$$

$$P\{|U(t) - (u(1+i-j) + \alpha t) | \geq$$

$$[u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2]^{\frac{1}{3}}\} \leq$$

$$Var[U(t)] [u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2]^{\frac{2}{3}} =$$

$$[u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2]^{\frac{1}{3}}$$

(8)

因此有

$$E[e^{-RU(t)}] = E[e^{-Rt((I-i)-(J-j))}].$$

$$E[e^{-RU(T)+RT((I-i)-(J-j))} | T < \infty] \psi(u) +$$

$$[u^2(p^2 + q^2) + \beta^2 t + \delta^2 \sigma^2]^{\frac{1}{3}} + e^{-R\Delta}$$

假设 $p(x)$ 为 I 的概率密度函数, 设 $p(x) > 0$ 是连续函数, 因此存在 $x_0 < i$, 使得对某个 ε 领域

$U(x_0, \varepsilon) \subset (0, i)$, $p(x)$ 在 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 上有最小值 d , 即 $p(x) > d > 0$, 于是有

$$E[e^{-Rt(I-i)}] = \int_0^{+\infty} e^{-Rt(x-i)} p(x) dx > \int_0^t e^{-Rt(x-i)} p(x) dx >$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-Rt(x-i)} p(x) dx > 2\varepsilon d e^{-Rt(x_0+\varepsilon-i)} \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$$

(9)

又因为 $e^{-Rt(J-j)}$ 为指数函数, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E[e^{-Rt(J-j)}] > 0$, 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$E[e^{-Rt((I-i)-(J-j))}] \rightarrow \infty, e^{-R\Delta} \rightarrow 0, \text{ 则有}$$

$$E[e^{-Ru(1+I-J)}] \leq \frac{E[e^{-RU(t)}]}{E[e^{-Rt((I-i)-(J-j))}]} \rightarrow$$

$$E[e^{-RU(T)+RT((I-i)-(J-j))} | T < \infty] \psi(u)$$

$$\text{所以 } \psi(u) = \frac{E(e^{-R(1+I-J)u})}{E[e^{-RU(T)+RT((I-i)-(J-j))} | T < \infty]}.$$

参考文献:

- [1] 何树红, 陈焱. 常利率因素的双险种风险模型[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2004, 26(6): 456-469.
- [2] 何树红, 赵金娥, 马丽娟. 常利率下保险费随机收取的双险种风险模型[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2005, 27(5A): 629-633.
- [3] 范修宇. 随机利率下的保险精算模型[D]. 大连: 大连理工大学, 2005.
- [4] 陈飞跃, 王蓓. 随机利率和通货膨胀率下的双险种破产模型[J]. 保险职业学院学报, 2008, 22(6): 56-59.
- [5] 马钰. 不同因素下带干扰的双险种风险模型研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2010.
- [6] 陈茜, 余兰萍. 随机利率下的双险种风险模型[J]. 数学理论与应用, 2007, 27(4): 114-116.