

文章编号: 1674-8085(2020)04-0006-04

tanh 函数法及其在 Joseph-Egri 方程中的推广和应用

*李 萍¹ 白 羽²

(1 周口技师学院文化基础课部, 河南 周口 466000 2 周口师范学院数学与统计学院, 河南 周口 466000)

摘 要: 在齐次平衡原则的基础上探讨了 tanh 函数法及其一种推广的 tanh 函数法的具体解方程的步骤, 应用 Joseph-Egri 方程进行具体求解, 得到了在不同情况下不同结果的精确解。

关键词: 齐次平衡原则; tanh 函数法; 推广的 tanh 函数法; Joseph-Egri 方程; 精确解

中图分类号: Q175.23

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2020.04.002

TANH FUNCTION METHOD AND ITS APPLICATION IN JOSEPH-EGRI EQUATION

*LI Ping¹, BAI Yu²

(1. Basic culture department, Zhoukou Technician College, Zhoukou, Henan 466000, China;

2. School of mathematics and statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou, Henan 466000, China)

Abstract: Based on the principle of homogeneous equilibrium, this paper discusses the steps of tanh function method and its extended method to solve the equation. By applying the Joseph egri equation to solve the equation, we get the exact solutionsofdifferentresultsindifferent situations.

Key words: homogeneous equilibrium principle; tanh function method; extended method; Josephegri equation; exact solution

0 引言

在现实生活当中, 由于非线性偏微分方程的广泛应用^[1], 而引发对此研究的热潮。而 tanh 函数法^[2]是在齐次平衡法^[3]的基础之上, 解非线性偏微分方程的孤立波解, 可以借助它来解 Ginzburg-Landau 方程^[4]和修改的 IBq 方程^[5]。但是在解题的过程中, 发现了它的局限性, 由此产生后来推广的 tanh 函数法^[6]。而对于推广的 tanh 函数法, 在解 sine-Gordon 方程、KDV 方程的新式解^[7]以及非线性发展方程(组)的行波解^[8]时, 可以达到用 tanh 函数法所不能达到的效果。本文将以前一个 Joseph-Egri 方程为例, 分别用 tanh 函数法和推广的 tanh 函数法解出它的精确解, 去直观地展示不同的精确解。

1 tanh 函数法

对于非线性微分方程, 假定其一般形式为

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}) = 0 \quad (1.1)$$

第 1 步: 一般情况下, 取 $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, 将方程转化为关于 ξ 的常微分方程

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (1.2)$$

第 2 步: 引入一个独立的新变量

$$Y = \tanh(\xi), \xi = x - ct \quad (1.3)$$

即有:

$$Y' = 1 - Y^2$$

第 3 步: 假设方程可以得到 tanh 函数多项式如下形式的解:

收稿日期: 2020-02-15; 修改日期: 2020-04-08

作者简介: *李 萍(1966-), 女, 河南周口人, 高级讲师, 主要从事偏微分方程精确解的研究(E-mail:604799880@qq.com);

白 羽(1995-), 女, 河南信阳人, 主要从事微分方程的研究(E-mail:1085643931@qq.com).

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, \quad Y = \tanh(\xi) \quad (1.4)$$

其中系数 $a_i (i=0, 1, \dots, m)$ 为待定系数, m 为正整数, 则可以得到:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_m Y^m$$

由此根据齐次平衡原则, 将平衡方程中的最高阶非线性项的幂次与线性最高阶导数项的幂次相等, 可确定参数 m 。

第 4 步: 将确定的阶数代入(1.2)式中, 并且合并 Y 的同次幂系数, 将其各项系数化为零, 可以得到关于待定参数 $a_i (i=0, 1, \dots, m)$, c 的非线性代数方程组, 从中解出 $a_i (i=0, 1, \dots, m)$, c 。

第 5 步: 把 $a_i (i=0, 1, \dots, m)$, c 代入(1.3)式和(1.4)式中得到非线性方程(1.1)的精确解。

2 推广的 tanh 函数法

推广的 tanh 函数法是将双曲正切函数 $\tanh(\xi)$ 与双曲余切函数 $\coth(\xi)$ 同时考虑在内, 其他步骤与 tanh 函数法一样, 只是将 tanh 函数法中解的形式变成具有两个变元形式的多项式。令方程的解为如下形式

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i + \sum_{i=1}^m b_i Y^{-i} \quad (2.1)$$

且 $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$, $a_i (i=0, 1, 2, \dots, m)$, $b_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为待定参数, m 为正整数。

3 基于 tanh 函数法的 Joseph-Egri 方程求解

对于 Joseph-Egri 方程

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} + u_x = 0 \quad (3.1)$$

对于方程(3.1)作行波变换 $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, 方程(3.1)化为关于变量 ξ 的常微分方程, 再对于 ξ 求积分, 并且积分常数取零, 得出

$$-cu + u + \frac{u^2}{2} - \beta cu'' = 0 \quad (3.2)$$

令方程的解为如下形式, 其中系数 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, m)$ 为待定系数, m 为正整数。

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i, \quad Y = \tanh(\xi) \quad (3.3)$$

对于双曲正切函数

$$Y = \tanh(\xi), \quad Y' = 1 - Y^2 \quad (3.4)$$

又因为

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_m Y^m$$

根据齐次平衡法可得, 最高阶导数项 $u''(\xi)$ 和 $u^2(\xi)$ 的最高次幂相等, 即 $m+2=2m$, 由此确定出 $m=2$ 。

于是方程(3.2)的解为

$$u = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (3.5)$$

由此分别得到 $-cu$, $\frac{u^2}{2}$, u'' , 并将其代入(3.2)式变成

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 - ca_0 - ca_1 Y - ca_2 Y^2 + \frac{a_2^2}{2} Y^4 + a_1 a_2 Y^3 + \\ & \left(a_0 a_2 + \frac{a_1^2}{2} \right) Y^2 + a_0 a_1 Y + \frac{a_0^2}{2} - \beta c (6a_2 Y^4 + 2a_1 Y^3 - \\ & 8a_2 Y^2 - 2a_1 Y + 2a_2) = 0 \end{aligned}$$

再合并 Y 的同次幂, 并令 Y 的各个次幂的系数为零, 可以得到一组方程得到关于 a_0, a_1, a_2, c 的非线性代数方程组。从而解方程组可得两组解:

$$(1) \quad a_0 = \frac{-4\beta}{4\beta-1}, a_1 = 0, a_2 = \frac{12\beta}{1-4\beta}, c = \frac{1}{1-4\beta}$$

$$(2) \quad a_0 = \frac{-4\beta}{4\beta+1}, a_1 = 0, a_2 = \frac{12\beta}{1+4\beta}, c = \frac{1}{1+4\beta}$$

得到 Joseph-Egri 方程的精确解为

$$u_1 = \frac{-4\beta}{4\beta-1} + \frac{12\beta}{1-4\beta} \tanh^2 \left(x - \frac{1}{1-4\beta} t \right)$$

$$u_2 = \frac{-12\beta}{4\beta+1} + \frac{12\beta}{1+4\beta} \tanh^2 \left(x - \frac{1}{1+4\beta} t \right)$$

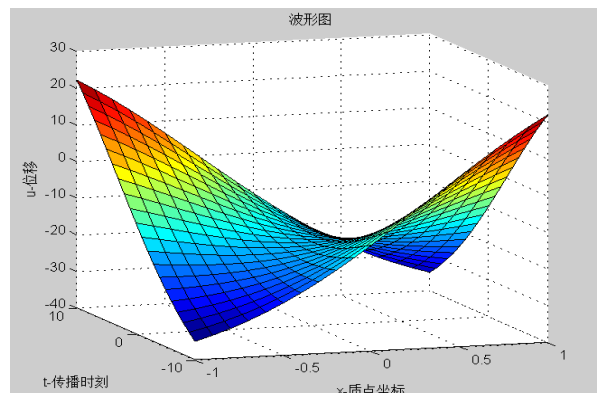


图 1 $\beta=3$ 时, u_1 的波形图

Fig.1 Waveform of u_1 when $\beta=3$

4 基于推广的 tanh 函数法的 Joseph-Egri 方程求解

现在继续考虑 Joseph-Egri 方程

$$u_t + u_x + uu_x + \beta u_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

对于方程(4.1)作行波变换 $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, 方程(4.1)化为关于变量 ξ 的常微分方程, 再对于 ξ 求积分, 并且积分常数取零, 得出

$$-cu + u + \frac{u^2}{2} - \beta cu'' = 0 \quad (4.2)$$

并且令方程的解为如下形式

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i Y^i + \sum_{i=1}^m b_i Y^{-i}, \quad Y = \tanh(\xi) \quad (4.3)$$

其中系数 $a_i (i=0, 1, \dots, m)$, $b_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$ 为待定参数, m 正整数, 且 $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$ 。

对于双曲正切函数

$$Y = \tanh(\xi), \quad Y' = 1 - Y^2 \quad (4.4)$$

又因为

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \dots + a_m Y^m + b_1 Y^{-1} + b_2 Y^{-2} + \dots + b_m Y^{-m}$$

根据齐次平衡法, 最高阶导数项 $u''(\xi)$ 和 $u^2(\xi)$ 的最高次幂相等, 即 $m+2=2m$, 由此确定出 $m=2$ 。

于是可以得出方程(4.2)的解为

$$u = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \frac{b_1}{Y} + \frac{b_2}{Y^2} \quad (4.5)$$

现将(4.5)分别化为 $-cu$, $\frac{u^2}{2}$, u'' 并将其分别代入(4.2)式, 可得出

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \frac{b_1}{Y} + \frac{b_2}{Y^2} - ca_0 - ca_1 Y - ca_2 Y^2 - \\ & \frac{cb_1}{Y} - \frac{cb_2}{Y^2} + \frac{a_2^2}{2} Y^4 + a_1 a_2 Y^3 + \left(a_0 a_2 + \frac{a_1^2}{2} \right) Y^2 + \\ & (a_0 a_1 + a_2 b_1) Y + \left(\frac{a_0^2}{2} + a_1 b_1 + a_2 b_2 \right) + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_2}{Y} + \\ & \frac{a_0 b_2 + \frac{b_1^2}{2}}{Y^2} + \frac{b_1 b_2}{Y^3} + \frac{b_2^2}{Y^4} - \beta c (6a_2 Y^4 + 2a_1 Y^3 - 8a_2 Y^2 - \\ & 2a_1 Y + (2a_2 + 2b_2) - \frac{2b_1}{Y} - \frac{8b_2}{Y^2} + \frac{2b_1}{Y^3} + \frac{6b_2}{Y^4}) = 0 \end{aligned}$$

再合并同类项次幂, 并令 Y 各次幂的系数为零, 得到关于 $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c$ 的非线性代数方程组, 从而对方程组求解可得:

$$a_0 = \frac{32\beta}{1-32\beta}, a_1 = 0, a_2 = \frac{12\beta}{256\beta^2 - 40\beta + 1}$$

$$c = \frac{1}{256\beta^2 - 40\beta + 1}, b_1 = 0, b_2 = \frac{12\beta}{256\beta^2 - 40\beta + 1}$$

所以得到 Joseph-Egri 方程的精确解为

$$u = \frac{32\beta}{1-32\beta} + \frac{12\beta}{256\beta^2 - 40\beta + 1} \cdot \tanh^2 \left(x - \frac{1}{256\beta^2 - 40\beta + 1} t \right) + \frac{12\beta}{256\beta^2 - 40\beta + 1} \coth^2 \left(x - \frac{1}{256\beta^2 - 40\beta + 1} t \right)$$

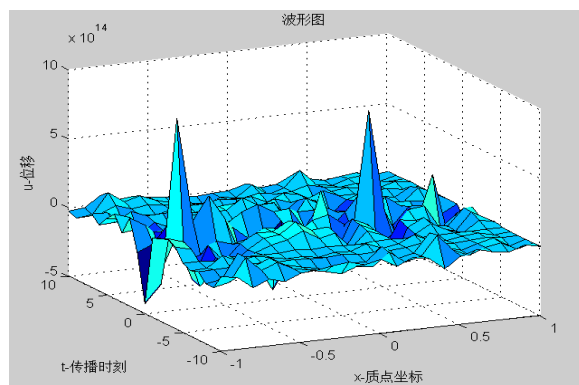


图2 $\beta=3$ 时, u 的波形图

Fig.2 Waveform of u when $\beta=3$

由图1和图2进行直观地对比, tanh 函数法比推广的方法更局限, 从两个波形图就可以看出, 只从 x -质点坐标定下时与 u -位移联系来看, 用 tanh 函数法会使解的形式更加的单一, 会使一部分解丢失。而推广的方法相对于原来的 tanh 函数法能解出更多丰富的解, 从而更加的有优势。

5 总结

本文是在利用齐次平衡原则的基础上, 先是通过 tanh 函数法求 Joseph-Egri 方程, 从而求解出 Joseph-Egri 方程的精确解, 然后为了进一步研究不同形式下的孤立波解, 应用推广形式下的 tanh 函数法求解 Joseph-Egri 方程。虽然求解过程相较于 tanh 函数法更为复杂, 但由于考虑了更精确解的情况, 得到了在各种不同类型下的解的情况。

参考文献:

- [1] 盖立涛, 非线性偏微分方程的几类求解方法的探究及应用[D]. 呼和浩特: 内蒙古工业大学, 2015:10-11.
- [2] 焦向莉. Tanh 函数展开法和 CRE 方法在非线性的偏微分方程中的应用[D]. 宁波: 宁波大学, 2015.
- [3] 廖雨, 呼家源. 齐次平衡法与 Burgers-Huxley 方程的精确解[J]. 宝鸡文理学院学报, 2014(4):32-36.
- [4] 李自田. LIZi-tian. 经由 tanh-函数法和[G'/G]-扩展法的 Ginzburg-Landau-方程的新的精确同宿波和周期波解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2011, 28(1): 67-71.
- [5] 范凯. 修改的广义 Riccati 方程有理展开法求解非线性演化方程[D]. 沈阳: 东北大学, 2014:14-24.
- [6] 刘雪梅, 接贤. 利用推广的 Tanh 函数法求解两个非线性发展方程[J]. 中国民航大学学报, 2015(4):46-49.
- [7] 林府标, 张千宏. 广义 tanh 函数法中 Riccati 方程和 sine-Gordon 方程的新解及其新应用[J]. 工程数学学报, 2020(1):52-57.
- [8] 额尔敦布和, 特木尔朝鲁, 白玉梅. 利用改进的扩展 tanh 函数方法求解非线性发展方程(组)的行波解[J]. 内蒙古民族大学学报: 自然汉文版, 2011, 26(2): 125-133.