

文章编号: 1674-8085(2019)04-0008-04

交换折叠超立方体的连通度

*蔡学鹏, 杨 伟, 任佰通, 冯苗苗

(新疆农业大学数理学院, 新疆, 乌鲁木齐 830052)

摘 要: P.K.K.Loh 等人从超立方体 Q_n 中系统地移除了一些边后获得了交换超立方体 $EH(s, t)$ 。李等人在 $EH(s, t)$ 的基础上增加了一些边获得了一个新的互连网络交换折叠超立方体 $EH(s, t)$ 。连通度是衡量网络容错性的一个重要参数, 并且连通度越大网络越可靠。本文证明了 $EH(s, t)$ 的连通度等于其最小度。

关键词: 超立方体; 折叠超立方体; 交换折叠超立方体; 连通度

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2019.04.002

THE CONNECTIVITY OF EXCHANGED FOLDED HYPERCUBE

*CAI Xue-peng, YANG Wei, REN Bai-tong, FENG Miao-miao

(College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi, Xinjiang 830052, China)

Abstract: The exchanged hypercube $EH(s, t)$, proposed by P.K.K.Loh et. al., was obtained by systematically removing links from a binary hypercube Q_n . Li. et. al. proposed a new interconnection network, which was named exchanged folded hypercube $EH(s, t)$ and was basically a standard exchanged hypercube with some extra edges constructed between the nodes. The connectivity was an important measurement for fault-tolerance of the network. The larger connectivity is, the more reliable the network is. In this work we will show that the connectivity of $EH(s, t)$ is equal to its minimum degree.

Key words: hypercube; folded hypercube; exchanged folded hypercube; connectivity

0 引言

随着计算机的飞速发展, 信息化和数字化技术的不断进步, 许多实际问题的数学模型使离散型结构上的数字化技术得到了更多人的关注, 图的连通度理论^[1-7]作为离散数学的一个重要的组成部分。多处理器系统由两个或两个以上的处理器构成, 处理器交换各种信息是用消息协议通过互连网络传播的。在大规模集成(VLSI)技术和圆片规模集成技术(WSI)领域的最新进步已经能使含有非常多的处理器数量的处理器系统实现信息交流。因为增加的多

处理器系统中处理器的数量、多处理器系统的可靠性和容错性的研究已经成为一个活跃的热门的研究领域, 因此受到了国际数学界与工程界越来越广泛的重视。

本文仅考虑有限的、无向的、简单的并且连通的图^[1,8-9]。

设 $G = G(V, E)$ 是一个图。对于图 G 中两个子图 H 和 K , 记 G/H 是点集 $V(G)/V(H)$ 诱导的子图。设 $N_H(K)$ 是在 H 中且与 K 中的点相邻的点的集合。特殊地, 如果 $K = \{v\}$, 可记作 $N_H(v)$ 。设 $d_G(v) = |N_G(v)|$ 是点 v 在图 G 中的度, 设

收稿日期: 2019-03-28; 修改日期: 2019-04-22

基金项目: 新疆农业大学国家级大学生创新创业训练计划项目(201810758035)

作者简介: *蔡学鹏(1991-), 男, 甘肃武威人, 助教, 硕士, 主要从事图与网络优化研究(Email:cxpmaths@163.com);

杨 伟(1989-), 男, 甘肃武威人, 助教, 硕士, 主要从事图与网络优化研究(Email:1017781425@qq.com);

任佰通(1997-), 男, 重庆人, 新疆农业大学数理学院 2017 级数学与应用数学专业本科生(Email:3212989741@qq.com);

冯苗苗(1999-), 女, 重庆人, 新疆农业大学数理学院 2017 级数学与应用数学专业本科生(Email:2955398005@qq.com).

$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 。如果不产生歧义, 我们可省略下标即记为 $d(v), N(v), N[v]$ 。 $\delta(G) = \min_{v \in G} \{d(v)\}$ 表示图 G 的最小度。

设 $S \subseteq V(G)$ (或者 $S \subseteq E(G)$), 如果 $G-S$ 是不连通的或者平凡的, 则称 S 是图 G 的一个点割 (或者边割)。连通度 (或者边连通度) 是衡量网络可靠性的一个重要参数。图 G 的连通度 $\kappa(G)$ (或者边连通度 $\lambda(G)$) 是图 G 中最小点割 (或者边割) 的基数。我们知道 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, 并且 $\kappa(G)$ (或者 $\lambda(G)$) 越大图 G 就越可靠。

互联网络的拓扑结构经常被表示成一个连通的图, 其中图的点和边分别表示互联网络的处理器和互联网络的连接线^[9]。在平行计算系统中, n 维超立方体 Q_n ^[10], n 维折叠超立方体 FQ_n ^[11] 和交叉超立方体 $EH(s, t)$ ^[12] 是三个重要的互联网络。

基于这三个网络, 李^[13]等人在 2005 年提出了一个新的网络交换折叠超立方体 $EFH(s, t)$ 。 $EFH(s, t)$ 是在 $EH(s, t)$ 的基础上增加了一些额外的边获得的, 并且这些边称为补边。交换折叠超立方体有许多重要的特性, 比如它有短的直径和低消费因子。最近, K.Bhavani^[14]等人研究了交换折叠超立方体中的短路径问题。有关交换折叠超立方体的详细内容参见文献[13-14]。

我们都知道 $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$ 。马^[2]证明了 $\kappa(EH(s, t)) = \lambda(EH(s, t)) = s+1$, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。本文将证明 $\kappa(EFH(s, t)) = \lambda(EFH(s, t)) = s+2$, $1 \leq s \leq t$ 。

1 预备知识

一个二进制 n 元字符串 $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_0$ 的第 i 个字符 x_i 记为 $x[i]$, $0 \leq i \leq n-1$ 。

记 $x[i:j] = x_i x_{i+1} \cdots x_j$, $\bar{x} = \bar{x}_{n-1} \bar{x}_{n-2} \cdots \bar{x}_0$, 其中 $\bar{x}_i = 1 - x_i$ 。设 $y = y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_0$, $H(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i - y_i|$ 称为 $x = x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_0$ 与 $y = y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_0$ 的哈密顿距离。

定义 1.1^[2] 设交换超立方体 $EH(s, t) = G(V, E)$, s, t

是正整数。交换超立方体 $EH(s, t)$ 的点集

$$V(EH(s, t)) = \{a_{s-1} a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} b_{t-2} \cdots b_0 c \mid a_i, b_j, c \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-1, 0 \leq j \leq t-1\},$$

边集 $E(EH(s, t)) = \{(u, v) \mid (u, v) \in V(EH(s, t)) \times V(EH(s, t))\}$ 是由三种类型的边 E_1, E_2, E_3 构成。

其中

$$E_1: u[s+t:1] = v[s+t:1], u[0] \neq v[0].$$

$$E_2: u[t:1] = v[t:1], H(u[s+t:t+1], v[s+t:t+1]) = 1, u[0] = v[0] = 0.$$

$$E_3: u[s+t:t+1] = v[s+t:t+1], H(u[t:1], v[t:1]) = 1, u[0] = v[0] = 1.$$

通过定义, 立即可得 $EH(s, t)$ 的点数 $|V(EH(s, t))| = 2^{s+t+1}$, $EH(s, t)$ 的边数 $|E(EH(s, t))| = (s+t+2)2^{s+t+1}$ 。设 $(u, v) \in E(EH(s, t))$, 对某个 $i = 1, 2, 3, \dots, s+t$, $u[i] = v[i]$ 且 $u[j] \neq v[j]$, $j \neq i$, 此时称边 (u, v) 是 i -边。如果 $EH(s, t)$ 中两个点 u 和 v 通过 i -边相邻, 则称 u 和 v 沿维数 i 相邻。我们也称 u 是 v 的 i -邻点, 记作 $v = n_i(u)$ 。因为 $EH(s, t)$ 是 Q_n 的一个子图, 所以 $EH(s, t)$ 是一个二部图。

定义 1.2^[13] 交换折叠超立方体, 记为 $EFH(s, t)$, 它是由交换超立方体 $EH(s, t)$ 中的任意两个互补的点 $u = a_{s-1} a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} b_{t-2} \cdots b_0 c$ 和 $\bar{u} = \bar{a}_{s-1} \bar{a}_{s-2} \cdots \bar{a}_0 \bar{b}_{t-1} \bar{b}_{t-2} \cdots \bar{b}_0 \bar{c}$ 增加一条边后得到的。这些新增加的边称为 $EFH(s, t)$ 的补边, 它们构成的集合记为 E_4 。

$EH(1, 2)$ 和 $EFH(1, 2)$ 的图见图 1。

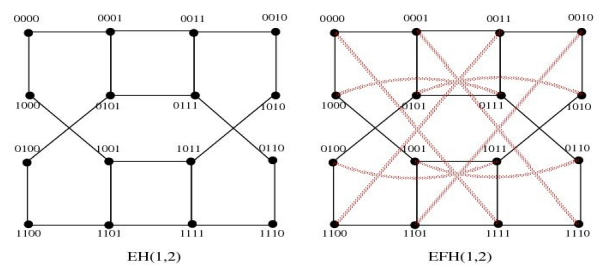


图 1 $EH(1, 2)$ 和 $EFH(1, 2)$

Fig.1 $EH(1, 2)$ and $EFH(1, 2)$

通过定义 1.2, $EFH(s, t)$ 中点数 $|V(EFH(s, t))| = 2^{s+t+1}$, $EFH(s, t)$ 包含四种不同类型的边。 E_1 型边: $|E_1| = 2^{s+t}$ 条, E_2 型边: $|E_2| = 2^s \times t 2^{t-1} = t 2^{s+t-1}$ 条, E_3 型边: $|E_3| = 2^t \times s 2^{s-1} = s 2^{s+t-1}$ 条, E_4 型边: $|E_4| = 2^{s+t}$ 条。 $EFH(s, t)$ 中边的总数 $|E| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| = (s+t+4) \cdot 2^{s+t-1}$, 设 $u \in V(EFH(s, t))$, 如果 $u[0] = 0$,

则 $d(u) = s + 2$ ，否则 $d(u) = t + 2$ 。

引理 1.1^[2] $\kappa(EH(s, t)) = \lambda(EH(s, t)) = s + 1$ ，
 $1 \leq s \leq t$ 。

引理 1.2^[12] $EH(s, t)$ 同构与 $EH(t, s)$ 。

引理 1.3^[13] $EFH(s, t)$ 同构与 $EFH(t, s)$ 。

通过引理 1.2 和引理 1.3，我们可以在下面讨论中设 $s \leq t$ ，则 $\delta(EH(s, t)) = s + 1$ 且 $\delta(EFH(s, t)) = s + 2$ 。

引理 1.4^[12] $EH(s, t)$ 可分解成两个 $EH(s-1, t)$ 或两个 $EH(s, t-1)$ 。

引理 1.5^[12] $EH(s, t)$ 是 2-连通的。

引理 1.6^[13] $EFH(s, t)$ 是 2-连通的。

2 交换折叠超立方体的连通度

引理 2.1 $\kappa(EFH(1, t)) \geq 3$ ， $t \geq 1$ 。

证明： 设 F 是 $EFH(s, t)$ 中的任意一个点集且 $|F| \leq 2$ ，我们将证明 $EFH(s, t) - F$ 是连通的。

$t = 1$ 时，结论明显成立。

现设 $t \geq 2$ ， $EFH(s, t)$ 可被分解成为子图 L_1 和子图 R_1 ，其中

$$V(L_1) = \{ab_{t-1} \cdots 0c | a, b_j, c \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq t-1\},$$

$$V(R_1) = \{ab_{t-1} \cdots 1c | a, b_j, c \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq t-1\}$$

L_1 和 R_1 分别是由点集 $V(L_1)$ 和 $V(R_1)$ 诱导的子图。明显地， L_1 和 R_1 都同构于 $EH(1, t-1)$ ，并且连接 L_1 和 R_1 的边都是由 E_3 和 E_4 构成。

方便起见，设 $F_{L_1} = F \cap L_1$ 且 $F_{R_1} = F \cap R_1$ 。不失一般性，我们可以假设 $|F_{L_1}| \geq |F_{R_1}|$ ，则 $|F_{R_1}| \leq 1$ 。

因为 R_1 同构于 $EH(1, t-1)$ ，由引理 1.1 知， $R_1 - F_{R_1}$ 是连通的。下面证明 $L_1 - F_{L_1}$ 中的任何一个点通过一条路与 $R_1 - F_{R_1}$ 中的一个点连通。考虑下面两种情形：

情形 1. 设 $u = ab_{t-1} \cdots b_1 01$ ，则 $n_2(u) = ab_{t-1} \cdots b_1 11$ 是 u 在 R_1 中的一个邻点。如果 $n_2(u) \notin F_{R_1}$ ，则结论成立。因此假设 $n_2(u) \in F_{R_1}$ ，那么 $\bar{u}$ 是 u 通过 E_4 中的一条边相连的邻点。通过定义， $\bar{u} \in R_1$ ，则设 $P_1 = u\bar{u}$ 是连接 u 到 R_1 中点的一条路。

情形 2. 设 $u = ab_{t-1} \cdots b_1 00$ ，注意到 $|N(u)| =$

$|N_{L_1}(u) \cup \{\bar{u}\}| = 3$ 且 $\bar{u} \in R_1$ 。如果 $\bar{u} \notin F_{R_1}$ ，结论成立。

因此假设 $\bar{u} \in F_{R_1}$ ，有 $|N_{L_1}(u)| = 2$ 。设 $N_{L_1}(u) = \{u_1, u_2\}$ ，这里 $u_1 = \bar{a}b_{t-1} \cdots b_1 00$ ， $u_2 = ab_{t-1} \cdots b_1 01$ 。如果 $F = \{\bar{u}, u_1\}$ ，设 $P_2 = uu_2\bar{u}$ 是一条连接 u 到 $\bar{u}$ 的路， $\bar{u}_2 \in R_1$ 。如果 $F = \{\bar{u}, u_2\}$ ，设 $P_2 = uu_1\bar{u}$ 是一条连接 u 到 $\bar{u}$ 的路， $\bar{u}_1 \in R_1$ 。因此证明完成。

定理 2.1 $\kappa(EFH(s, t)) = s + 2, 1 \leq s \leq t$ 。

证明： $EFH(s, t)$ 可分解成两个子图 L 和 R ，其中 $V(L) = \{0a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_0c | a_i, b_j, c \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq t-1\}$ $V(R) = \{1a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_0c | a_i, b_j, c \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq t-1\}$ L 和 R 分别是由点集 $V(L)$ 和 $V(R)$ 诱导的子图。明显地， L 和 R 都同构于 $EH(s-1, t)$ ，并且 L 和 R 之间的边是由 E_2 和 E_4 构成。

如果 $s = 1$ ，则 $\delta(EFH(s, t)) = s + 2 = 3$ ，由引理 2.1，可以得到 $\kappa(EFH(s, t)) = s + 2 = 3$ 。

设 $s \geq 1$ ，由引理 1.1，可知 $\kappa(L) = \kappa(R) = s$ 。设 S 是 $EFH(s, t)$ 的一个最小的点割，令

$$A = \{0a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_01 | a_i, b_j \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq t-1\}$$

$$B = \{0a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_00 | a_i, b_j \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq t-1\}$$

$$C = \{1a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_01 | a_i, b_j \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq t-1\}$$

$$D = \{1a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_00 | a_i, b_j \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq s-2, 0 \leq j \leq t-1\}$$

则有 $A \cup B = V(L)$ 且 $C \cup D = V(R)$ 。 A 与 B (C 与 D) 之间的边位于 E_1 中且构成由点集 $A \cup B$ ($C \cup D$) 诱导的子图的一个完美匹配。 B 与 C 之间的边位于 E_2 中且构成了由点集 $B \cup C$ 诱导的子图的一个完美匹配。 A 与 C (B 与 D) 之间的边位于 E_4 中且构成了由点集 $A \cup C$ ($B \cup D$) 诱导的子图的一个完美匹配。

下面分两种情形计算 $|S|$ 。

情形 1. $L - S$ 和 $R - S$ 都连通。

我们容易知 E_4 中每条边的至少一个端点都属于 S 。即有 $|S| \geq |E_4| \geq 2^{s+t} > 2^{s+1} > s + 2, t \geq s \geq 2$ 。此时 $EFH(s, t) - S$ 是连通的，这与 S 是点割矛盾。

情形 2. $L - S$ 或者 $R - S$ 不连通。

不失一般性，假设 $L - S$ 是不连通的。通过引理 1.1， S 在 L 中至少有 s 个点。方便起见设 $S_L = S \cap L$ 且 $S_R = S \cap R$ 。

如果 $|S_R| \leq 1$ ，设 $H = S \cap B$ 且 $F = S \cap A$ 。令

$K \subseteq A$, K 中的每一个点通过 E_1 中的边在 H 中都有一个匹配点 (见图 2), 那么 $|K|=|H|$ 。

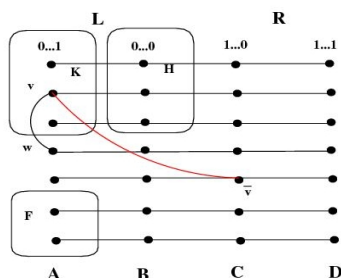


图 2 定理 2.1 证明中情形 2 的解释

Fig.2 Illustration of the proof of Case 2 of Theorem 2.1

由于 R 同构于 $EH(s-1, t)$ 并且 $EH(s-1, t)$ 是 2-连通的, 因此可知 $R-S_R$ 是连通的。因为 $B-H$ 中的每一个点在 R 都有两个邻点, 所以由点集 $V(R) \cup (B-H)$ 诱导的子图 Q 是连通的。因此移除 S 必须使得 K 中的某个点 v 与 Q 不连通。通过 $EFH(s, t)$ 的定义, 可知 $|N_A(v)|=t$ 且 $|N_H(v)|=1$ 且 $N_C(v)=\{\bar{v}\}$ 。如果 $\bar{v} \notin S_R$, 那么点 v 与 Q 通过 E_4 中的一条边相连, 矛盾产生。现在假设 $\bar{v} \in S_R$, 则 $N_{A-K}(v) \subseteq F$ 。否则 v 在 $A-K-F$ 中至少有一个邻点 w , 并且 v 通过点 w 和 E_1 中的边与 Q 连通, 因此与 $|S|=|H|+|F|+|\{\bar{v}\}| \geq |N(v)|=t+2 \geq s+2$ 。

设 $|S_R| \geq 2$, 则 $|S| \geq s+2$ 。

由于 $\delta(EFH(s, t))=s+2$, 则 $\kappa(EFH(s, t)) \leq s+2$ 。又因为 S 是一个最小的点割且 $|S| \geq s+2$, 可得 $\kappa(EFH(s, t)) \geq s+2$, 即 $\kappa(EFH(s, t))=s+2$ 。

由 $\kappa(EFH(s, t)) \leq \lambda(EFH(s, t)) \leq \delta(EFH(s, t))$, 有以下的定理 2.2。

定理 2.2 $\lambda(EFH(s, t))=s+2, 1 \leq s \leq t$ 。

3 小结

本文主要研究了衡量交换折叠超立方体网络 $EFH(s, t)$ 的可靠性的两个重要参数连通度和边连通度, 最终决定了 $\kappa(EFH(s, t))=\lambda(EFH(s, t))=s+2, s \leq t$ 。

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory[M]. Springer:

Springer Press, 2008.

- [2] Ma M J. The connectivity of exchanged hypercubes[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2010, 2(2):213-220.
- [3] Ma M J, Zhu L. The super connectivity of exchanged hypercubes[J]. Information Processing Letters, 2011, 111:360-364.
- [4] Li X, Xu J M. Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes[J]. Information Processing Letters, 2013, 113:533-537.
- [5] Esfahanian A H. Generalized measures of fault tolerance with application to n-cube network[J]. IEEE Transactions on Computation, 1989, 38(11):1586-1591.
- [6] Li X, Xu J M. Edge-fault tolerance of hypercube-like network[J]. Information Processing Letters, 2013, 113: 760-763.
- [7] 蔡学鹏, 艾尔肯·吾买尔. 交叉立方体的限制性连通度 (英文)[J]. 曲阜师范大学学报:自然科学版, 2018, 3(44): 25-32.
- [8] 蔡学鹏, 任佰通, 冯苗苗. 图的邻点强可区别 V-全色数的一个上界[J]. 井冈山大学学报:自然科学版, 2018, 3(39):5-8.
- [9] Xu J M. Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks[M]. London:Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [10] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes[J]. IEEE Transactions on Computation, 1988, 37(7):867-872.
- [11] El-Amawy A, Latif S. Properties and performance of folded hypercubes[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1991, 2(1):31-42.
- [12] Loh P K K, Hsu W J, Pan Y. The exchanged hypercube[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16(9):866-874.
- [13] Li Y, Qi H, Li Z Y, et al. An exchanged folded hypercube-based topology structure for interconnection networks[J]. Concurrency Computa: Pract. Exper, 2015, 27:4194-4210.
- [14] Bhavani K, Venkat Reddy P, Jena S, et al. Short path routing in exchanged folded hypercube[J]. International Journal of Research in Engineering and Technology. 2016(5):115-118.