文章编号：1674-8085(2019)04-0001-07

分形集上的 Ostrowski 型不等式和 Ostrowski-Grüss 型不等式

*时统业[1]，曾志红[2]

（1. 海军指挥学院，江苏，南京 211800；2. 广东第二师范学院学报编辑部，广东，广州 510303）

摘　要：在分形集上建立了涉及二阶局部分数阶导数的局部分数阶积分的恒等式。利用这个恒等式得到局部分数阶积分的广义 Ostrowski 型双边不等式。 利用局部分数阶广义 Grüss 不等式，得到局部分数阶的广义 Ostrowski - Grüss 型不等式。

关键词：局部分数阶积分；广义 Ostrowski 型不等式；广义 Ostrowski-Grüss 型不等式；分形集

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2019.04.001

OSTROWSKI TYPE INEQUALITIES AND OSTROWSKI-GRÜSS TYPE INEQUALITIES ON FRACTAL SETS

*SHI Tong-ye[1]，ZENG Zhi-hong[2]

(1. PLA Naval Command College, Nanjing, Jiangsu 211800, China;

2. Editorial Department of Journal, Guangdong University of Education, Guangzhou, Guangdong 510303，China)

Abstract: In this paper, first, local fractional integral identity involving second order local fractional derivatives is established on fractal sets. Second, generalized Ostrowski type double inequalities on fractal sets are obtained by using this identity. In the end, generalized Ostrowski-Grüss type inequalities on fractal sets are obtained by using generalized Grüss type inequality.

Key words: local fractional integral; generalized Ostrowski type inequality; generalized Ostrowski-Grüss type inequality; fractal sets

0　引言

为方便起见，本文记

$$M_f=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$T_f=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$M_f^\alpha=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$T_f^\alpha=\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t),$$

$$S_1=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a},$$

$$S=\frac{f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)}{(b-a)^\alpha}。$$

$$J_\alpha(a,b,c,x;f)=\Gamma(1+2\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(b-a-c)^\alpha\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^\alpha}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}c^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(a-b+c)^\alpha\times$$

收稿日期：2019-05-05；修改日期：2019-06-02

作者简介：*时统业(1963-)，男，河北张家口人，副教授，硕士，主要从事数学不等式研究(E-mail: shtycity@ sina.com);
曾志红(1974-)，女，广东梅州人，编审，主要从事编辑学和数学不等式研究(Email:zhzeng@gdei.edu.cn).

$$\left(x-\frac{3a+b-c}{4}\right)^{\alpha}\left[f^{(\alpha)}(a+b-x)-f^{(\alpha)}(x)\right]。$$

设 f：$[a，b]\to\mathrm{R}$ 二次可微，对任意 $x\in[a，b]$ 有 $\gamma\leqslant f''(x)\leqslant\Gamma$，文献[1]和文献[2]分别建立了双边不等式(1)和(2)，文献[3]建立了双边积分不等式(3)和(4)。

$$\frac{\gamma}{24}(b-a)^2\leqslant M_f\leqslant\frac{\Gamma}{24}(b-a)^2, \tag{1}$$

$$\frac{\gamma}{12}(b-a)^2\leqslant T_f\leqslant\frac{\Gamma}{12}(b-a)^2, \tag{2}$$

$$\frac{3S_1-2\Gamma}{24}(b-a)^2\leqslant M_f\leqslant\frac{3S_1-2\gamma}{24}(b-a)^2 \tag{3}$$

$$\frac{3S_1-\Gamma}{24}(b-a)^2\leqslant T_f\leqslant\frac{3S_1-\gamma}{24}(b-a)^2 \tag{4}$$

文献[3]举例说明了式(1)与式(3)式(2)与式(4)均不分强弱。最近，文献[4]将式(3)、(4)推广到分形集上。

定理 1[4] 设区间 $I\subseteq\mathrm{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^{\circ}\to\mathrm{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{2\alpha}[a,b]$，$f^{(2\alpha)}\in C_{2\alpha}[a,b]$。若存在常数 $\varphi,\Phi\in\mathrm{R}^{\alpha}$，使得对于任意 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi\leqslant f^{(2\alpha)}(x)\leqslant\Phi$，则有

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}}\left[\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)\Phi+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S\right]\leqslant M_f^{\alpha}\leqslant\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}}\times\left[\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)\varphi+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S\right] \tag{5}$$

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\Phi\right]\leqslant T_f^{\alpha}\leqslant\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\varphi\right] \tag{6}$$

关于分形空间上的局部分数阶微积分的相关理论可见文献[5-6]。设 R^{α} $(0<\alpha\leqslant1)$是分形实线的 α 型集合，$a^{\alpha},b^{\alpha},c^{\alpha}\in\mathrm{R}^{\alpha}$，则在这个分形集中有如下运算律：

1) $a^{\alpha}+b^{\alpha}\in\mathrm{R}^{\alpha}$，$a^{\alpha}b^{\alpha}\in\mathrm{R}^{\alpha}$；

2) $a^{\alpha}+b^{\alpha}=b^{\alpha}+a^{\alpha}=(a+b)^{\alpha}=(b+a)^{\alpha}$；

3) $a^{\alpha}+(b^{\alpha}+c^{\alpha})=(a^{\alpha}+b^{\alpha})+c^{\alpha}$；

4) $a^{\alpha}b^{\alpha}=b^{\alpha}a^{\alpha}=(ab)^{\alpha}=(ba)^{\alpha}$；

5) $a^{\alpha}(b^{\alpha}c^{\alpha})=(a^{\alpha}b^{\alpha})c^{\alpha}$；

6) $a^{\alpha}(b^{\alpha}+c^{\alpha})=a^{\alpha}b^{\alpha}+a^{\alpha}c^{\alpha}$；

7) $a^{\alpha}+0^{\alpha}=0^{\alpha}+a^{\alpha}=a^{\alpha}$，
$a^{\alpha}1^{\alpha}=1^{\alpha}a^{\alpha}=a^{\alpha}$。

下面使用 Gao-Yang-Kang 的方法来描述局部分数阶的导数和积分。

定义 1[5-6] 设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^{\alpha}$ 是不可微函数，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon^{\alpha}$，则称 f 在点 x_0 处局部分数阶连续。若 f 在区间 $I\subseteq\mathrm{R}$ 上局部分数阶连续，则记为 $f\in C_{\alpha}(I)$。

定义 2[5-6] 设 $f\in C_{\alpha}(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，则 f 在点 x_0 处的 α 阶局部分数阶导数定义为

$$f^{(\alpha)}(x_0)=\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\Big|_{x=x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Gamma(1+\alpha)(f(x)-f(x_0))}{(x-x)^{\alpha}}。$$

若对任意 $x\in I\subseteq\mathrm{R}$ 都存在 $f^{(\alpha)}(x)$，则记为 $f\in D_{\alpha}(I)$。一般地，记 $f^{(\alpha)}(x)=D_x^{\alpha}f(x)$，如果对任意 $x\in I\subseteq\mathrm{R}$，存在

$$f^{((k+1)\alpha)}(x)=\overbrace{D_x^{\alpha}\cdots D_x^{\alpha}}^{k+1\text{次}}f(x),$$

则记为 $f\in D_{(k+1)\alpha}(I)$，其中 $k=0,1,2,\cdots$。

定义 3[5] 设 $f\in C_{\alpha}[a,b]$，f 在点 $[a,b]$ 上的 α 阶局部分数阶积分定义为

$${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t\to0}\sum_{j=0}^{N-1}f(t_j)(\Delta t_j)^{\alpha},$$

其中，

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=b,$$

$$\Delta t_j=t_{j+1}-t_j\ \ (j=0,1,\cdots,N-1),$$

$$\Delta t=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_{N-1}\}。$$

规定当 $a=b$ 时，${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=0$；当 $a>b$ 时，${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=-{}_bI_a^{(\alpha)}f(x)$。若对任意 $x\in[a,b]$ 存在 ${}_aI_x^{(\alpha)}f(t)$，则记为 $f\in I_x^{(\alpha)}[a,b]$。

引理 1[5] 对任意 $k\in\mathrm{R}$，有

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x^{k\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}=\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}x^{(k-1)\alpha}；$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b x^{k\alpha}(\mathrm{d}x)^{\alpha}=\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)}\left(b^{(k+1)\alpha}-a^{(k+1)\alpha}\right)。$$

在闭区间上局部分数阶连续的函数是局部分数阶可积的。局部分数阶定积分有与黎曼定积分类似的性质，如线性性质、区间可加性、比较性质、绝对不等式、牛顿-莱布尼茨公式、换元法、分部积分法等[6-7]。

引理 2[5] 1) 设 $f(x)=g^{(\alpha)}(x)\in C_{\alpha}[a,b]$，则 ${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=g(b)-g(a)$。特别地，若 $f(x)$恒为常数 c，则有 ${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=\dfrac{c(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$。

2) 设 $f,g\in D_{\alpha}[a,b]$ 且 $f^{(\alpha)}(x)$, $g^{(\alpha)}(x)\in C_{\alpha}[a,b]$，则

$${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)g^{(\alpha)}(x)=f(x)g(x)\big|_a^b-{}_aI_b^{(\alpha)}f^{(\alpha)}(x)g(x)。$$

引理 3[7] 设 $f(x)$在$[a，b]$上连续，函数 $x=g(t)$满足条件

1) $g(c)=a$，$g(d)=b$；

2) $g(t)$在$[c，d]$有连续 α 阶导数($0<\alpha\leqslant 1$)，且值域 $R_g\subset[a，b]$，则有

$${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)={}_cI_d^{(\alpha)}f(g(t))(g'(t))^{\alpha}$$

定义 4[8] 设区间 $I\subseteq\mathrm{R}$，函数 $f:I\to\mathrm{R}^{\alpha}$，若对任意$u,v\in I$ 和任意 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leqslant\lambda^{\alpha}f(u)+(1-\lambda)^{\alpha}f(v)，$$

则称 f 是 I 上的广义凸函数。

定理 2[8](广义凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式) 设 $f:[a,b]\to\mathrm{R}^{\alpha}$ 是$[a，b]$上的广义凸函数，$f\in I_x^{(\alpha)}[a,b]$，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(x)}{(b-a)^{\alpha}}\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}。$$

为得到本文的主要结果，需要引用下面的引理。

引理 4 设区间 $I\subseteq\mathrm{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^{\circ}\to\mathrm{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{2\alpha}[a,b]$，$f^{(2\alpha)}\in C_{2\alpha}[a,b]$，则对于任意 $x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$和任意常数 c，有

$$J_{\alpha}(a,b,c,x;f)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}\quad(7)$$

其中

$$h(t)=\begin{cases}(t-a)^{2\alpha}, & t\in[a,x);\\ \left(t+\dfrac{c-a-b}{2}\right)^{2\alpha}, & t\in\left[x,\dfrac{a+b}{2}\right);\\ \left(t-\dfrac{c+a+b}{2}\right)^{2\alpha}, & t\in\left[\dfrac{a+b}{2},a+b-x\right);\\ (t-b)^{2\alpha}, & t\in[a+b-x,b].\end{cases}$$

证明 使用局部分数阶积分的分部积分法(引理 2)得

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x(t-a)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}=(x-a)^{2\alpha}f^{(\alpha)}(x)-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha}f(x)+\Gamma(1+2\alpha)\,{}_aI_x^{(\alpha)}f(t)，\quad(8)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}\left(t+\frac{c-a-b}{2}\right)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}=\left(\frac{c}{2}\right)^{2\alpha}f^{(\alpha)}\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(x+\frac{c-a-b}{2}\right)^{2\alpha}f^{(\alpha)}(x)-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\left(\frac{c}{2}\right)^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(x+\frac{c-a-b}{2}\right)^{\alpha}f(x)\right]+\Gamma(1+2\alpha)\,{}_xI_{\frac{a+b}{2}}^{(\alpha)}f(t)\quad(9)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}\left(t-\frac{c+a+b}{2}\right)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}=\left(x+\frac{c-a-b}{2}\right)^{2\alpha}f^{(\alpha)}(a+b-x)-\left(\frac{c}{2}\right)^{2\alpha}f^{(\alpha)}\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\left(\frac{c}{2}\right)^{\alpha}\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(x+\frac{c-a-b}{2}\right)^{\alpha}f(a+b-x)\right]+\Gamma(1+2\alpha)\,{}_{\frac{a+b}{2}}I_{a+b-x}^{(\alpha)}f(t)，\quad(10)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+b-x}^{b}(t-b)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}=$$

$$-(x-a)^{2\alpha}f^{(\alpha)}(a+b-x)-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha}\times$$

$$f(a+b-x)+\Gamma(1+2\alpha)_{a+b-x}I_b^{(\alpha)}f(t)，\tag{11}$$

将式(8)~(11)相加并整理，则式(7)得证。

注 1 在引理 4 中，若取 $c=\frac{b-a}{2}$，则得

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)-$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}}\left[\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-$$

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left(x-\frac{7a+b}{8}\right)^{\alpha}\left[f^{(\alpha)}(a+b-x)-\right.$$

$$\left.f^{(\alpha)}(x)\right]=\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\times$$

$$\left[\int_a^x(t-a)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\right.$$

$$\int_x^{\frac{a+b}{2}}\left(t-\frac{3a+b}{4}\right)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}\left(t-\frac{a+3b}{4}\right)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+$$

$$\left.\int_{a+b-x}^{b}(t-b)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}\right]。$$

注 2 在引理 4 中，若取 $c=0$，则得

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)-\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}=$$

$$\frac{1}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left[\int_a^x(t-a)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\right.$$

$$\int_x^{a+b-x}\left[\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{2\alpha}+\right.$$

$$\left.(b-a)^{\alpha}\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^{\alpha}\right]f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+$$

$$\left.\int_{a+b-x}^{b}(t-b)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}\right]\tag{12}$$

当 $x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 时，$a+b-x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，在式(12)中以 $a+b-x$ 替换 x，并经过变量代换则得到文献[9]中的引理 8。

在式(12)中取 x=a，得

$$\Gamma(1+2\alpha)_aI_b^{(\alpha)}f(t)-$$

$$\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(b-a)^{\alpha}\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\int_a^b\left[\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{2\alpha}-\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^{\alpha}}\right]f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}\tag{13}$$

注 3 在引理 4 中，若取 $c=b-a$，则得

$$\Gamma(1+2\alpha)_aI_b^{(\alpha)}f(t)-$$

$$\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}(b-a)^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\right.$$

$$\left.\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(t-b)^{2\alpha}f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}\right]\tag{14}$$

文献[4]通过建立式(13)和式(14)，得到双边不等式(5)和式(6)。

引理 5 设函数 $h(t)$如引理 4 所定义，则

$$\mu(x):=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)(\mathrm{d}t)^{\alpha}=\frac{2^{\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\times$$

$$\left[\left(\frac{c}{2}\right)^{3\alpha}+\left(\frac{a+b-c}{2}-x\right)^{3\alpha}+(x-a)^{3\alpha}\right]。$$

证明 利用引理 1 和引理 3 容易得证，略去过程。

引理 6 设函数 $h(t)$如引理 4 所定义，

$$M:=\sup_{t\in[a,b]}|h(t)|=$$

$$\left(\max\left\{\frac{a+b-c}{2}-x,x-a,\frac{c}{2}\right\}\right)^{2\alpha}，$$

则有

当 $0\leqslant c<\frac{b-a}{3}$ 且 $a\leqslant x<\frac{3a+b-c}{4}$，或者 $\frac{b-a}{3}\leqslant c<\frac{b-a}{2}$ 且 $a\leqslant x<\frac{a+b-2c}{2}$ 时，$M=\frac{a+b-c}{2}-x$；

当 $0\leqslant c<\frac{b-a}{3}$ 且 $\frac{3a+b-c}{4}\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$，或者 $\frac{b-a}{3}\leqslant c<\frac{b-a}{2}$ 且 $a+\frac{c}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$，或者 $c\geqslant\frac{b-a}{2}$ 且 x=$\frac{a+b}{2}$ 时，$M=x-a$；

当 $\frac{b-a}{3}\leqslant c<\frac{b-a}{2}$ 且 $\frac{a+b-2c}{2}\leqslant x<a+\frac{c}{2}$，或

者 $c \geqslant \frac{b-a}{2}$ 且 $a \leqslant x < a+\frac{c}{2}$ 时，$M=\frac{c}{2}$。

定理 3[10]**(Ostrowski 不等式)** 设 f：$[a，b] \to R$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可微，且对任意 $x \in (a,b)$ 有 $|f'(x)| \leqslant M$，则有

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{b-a}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

文献[11] 通过建立广义 Montgomery 恒等式，在分形集上给出广义 Ostrowski 不等式。

定理 4[12]**(Grüss 不等式)** 设 f，g 在 $[a，b]$ 上可积，$m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1$，$m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2$，$x \in [a，b]$，则有

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}(M_1-m_1)(M_2-m_2)。$$

文献[13]首次建立了 Ostrowski-Grüss 型不等式。

定理 5[13] 设区间 $I \subseteq R$，I° 是 I 的内部，$f: I \to R$，$a,b \in I^\circ$，$a<b$，f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，存在常数 γ, Γ，使得对于任意 $x \in [a,b]$ 有 $\gamma \leqslant f'(x) \leqslant \Gamma$，则 $x \in [a,b]$，有

$$\left|f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma)。$$

关于 Ostrowski-Grüss 型不等式的改进推广可参见文献[14-17]。

引理 7(广义 Grüss 不等式)[18] 设 $f,g:[a,b] \to R^\alpha$ 是两个 α 阶局部分数阶可积函数，存在常数 φ，Φ，$\gamma, \Gamma \in R^\alpha$，使得对于任意 $x \in [a,b]$ 有 $\varphi \leqslant f(x) \leqslant \Phi$，$\gamma \leqslant g(x) \leqslant \Gamma$，则有

$$T_\alpha(f,g) \leqslant \frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha \Gamma^2(1+\alpha)}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma),$$

其中

$$T_\alpha(f,g)=\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}{}_aI_b^{(\alpha)}f(x)g(x)-\left[{}_aI_b^{(\alpha)}f(x)\right]\left[{}_aI_b^{(\alpha)}g(x)\right]。$$

利用引理 7，文献[4]得到下面局部分数阶的带有扰动的中点不等式和梯形不等式。

定理 6[4] 设条件同定理 1，则有

$$\left|M_f^\alpha-\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha}\frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}S\right| \leqslant \frac{(b-a)^{2\alpha}}{16^\alpha\Gamma(1+2\alpha)}(\Phi-\varphi), \tag{15}$$

$$\left|T_f^\alpha-\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]S\right| \leqslant \frac{(b-a)^{2\alpha}}{16^\alpha\Gamma(1+2\alpha)}(\Phi-\varphi) \tag{16}$$

本文基于局部分数阶微积分理论，在分形集上给出广义 Ostrowski 型双边不等式和广义 Ostrowski-Grüss 型不等式。

1 主要结果

定理 7 设区间 $I \subseteq R$，I° 是 I 的内部，$f: I^\circ \to R^\alpha$，$a,b \in I^\circ$，$a<b$，$f \in D_{2\alpha}[a,b]$，$f^{(2\alpha)} \in C_{2\alpha}[a,b]$，$a \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2}$，$0 \leqslant c \leqslant a+b-2x$。若存在常数 $\varphi, \Phi \in R^\alpha$，使得对于任意 $x \in [a,b]$ 有 $\varphi \leqslant f^{(2\alpha)}(x) \leqslant \Phi$，则有

$$\Phi\left(\mu(x)-\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) \leqslant J_\alpha(a,b,c,x;f)-M\left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)\right] \leqslant \varphi\left(\mu(x)-\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right), \tag{17}$$

$$\nu(x)\varphi \leqslant J_\alpha(a,b,c,x;f)-(x-a)^{2\alpha} \times \left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)+f^{(\alpha)}(x)-f^{(\alpha)}(a+b-x)\right]-\omega(x)\left[f^{(\alpha)}(a+b-x)-f^{(\alpha)}(x)\right] \leqslant \nu(x)\Phi, \tag{18}$$

其中 $\mu(x)$ 和 M 分别如引理 5 和引理 6 所定义，

$$\omega(x)=\max\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^{2\alpha},\left(\frac{a+b-c}{2}-x\right)^{2\alpha}\right\},$$

$$\nu(x)=\mu(x)-\frac{2^\alpha(x-a)^{3\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}-\omega(x)\frac{2^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^\alpha。$$

证明 利用引理 4 和引理 5 得

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha=$$

$$J_\alpha(a,b,c,x;f)-\frac{\varphi}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=$$

$$J_\alpha(a,b,c,x;f)-\varphi\mu(x), \tag{19}$$

另一方面，因为有 $f^{(2\alpha)}(x)\geqslant\varphi$，故有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha\leqslant$$

$$\sup_{t\in[a,b]}|h(t)|\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha=$$

$$M\left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)-\frac{(b-a)^\alpha\varphi}{\Gamma(1+\alpha)}\right], \tag{20}$$

综合式(19)~(20)，则式(17)的右边部分得证。类似可证式(17)的左边部分。

因为有 $f^{(2\alpha)}(x)\geqslant\varphi$，故有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha=$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int_a^x(t-a)^{2\alpha}\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha+\right.$$

$$\int_x^{\frac{a+b}{2}}\left(t+\frac{c-a-b}{2}\right)^{2\alpha}\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha+$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}\left(t-\frac{c+a+b}{2}\right)^{2\alpha}\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha+$$

$$\left.\int_{a+b-x}^b(t-b)^{2\alpha}\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha\right\}\leqslant$$

$$\frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha+$$

$$\omega(x)\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha+$$

$$\omega(x)\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha+$$

$$\frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+b-x}^b\left[f^{(2\alpha)}(t)-\varphi\right](\mathrm{d}t)^\alpha=$$

$$(x-a)^{2\alpha}\left[f^{(\alpha)}(b)-f^{(\alpha)}(a)+f^{(\alpha)}(x)-\right.$$

$$\left.f^{(\alpha)}(a+b-x)-\frac{2^\alpha(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\varphi\right|+$$

$$\omega(x)\,(x-a)^{2\alpha}\left[f^{(\alpha)}(a+b-x)-f^{(\alpha)}(x)-\right.$$

$$\left.\frac{2^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^\alpha\varphi\right], \tag{21}$$

综合式(19)和式(21)，则式(18)的右边部分得证。类似可证式(18)的左边部分。

注 4 在式(17)中，若取 $x=a,c=b-a$，则得到式(5)。在式(18)中，取 $x=\frac{a+b}{2},c=b-a$ 也可得到式(5)。

推论 1 设区间 $I\subseteq\mathrm{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^\circ\to\mathrm{R}^\alpha$，$a,b\in I^\circ$，$a<b$，$f\in D_{2\alpha}[a,b]$，$f^{(2\alpha)}\in C_{2\alpha}[a,b]$，存在常数 $\varphi,\Phi\in\mathrm{R}^\alpha$，使得对于任意 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi\leqslant f^{(2\alpha)}(x)\leqslant\Phi$。则对任意 $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 有

$$\left[3\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{16}\right]^\alpha k\varphi-$$

$$(x-a)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S\leqslant$$

$$\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)\leqslant$$

$$\left[3\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{16}\right]^\alpha k\Phi-$$

$$(x-a)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S \tag{22}$$

特别地，在式(22)中 x 依次取 $\frac{a+b}{2},a,\frac{3a+b}{4}$，则得到式(5)和不等式

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha}k\varphi\leqslant T_f^\alpha\leqslant\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha}k\Phi,$$

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{16^\alpha}\left[k\varphi-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S\right]\leqslant\frac{1}{2^\alpha}\times$$

$$\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)\leqslant$$

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{16^\alpha}\left[k\Phi-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}S\right],$$

其中

$$k=\frac{1}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}$$

证明 在定理 7 中取 $c=0$，则式(22)得证。

定理 8 设条件同定理 7，则有

$$\mu(x)\varphi \leqslant J_\alpha(a,b,c,x;f) \leqslant \mu(x)\Phi$$

证明 因为$\varphi \leqslant f^{(2\alpha)}(t) \leqslant \Phi$，$h(t) \geqslant 0^\alpha$，故有

$$\mu(x)\varphi = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)\varphi(\mathrm{d}t)^\alpha \leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)f^{(2\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha \leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b h(t)\Phi(\mathrm{d}t)^\alpha = \mu(x)\Phi,$$

定理得证。

推论 2 设区间$I \subseteq \mathrm{R}$，I°是I的内部，$f: I^\circ \to \mathrm{R}^\alpha$，$a,b \in I^\circ$，$a<b$，$f \in D_{2\alpha}[a,b]$，$f^{(2\alpha)} \in C_{2\alpha}[a,b]$。若存在常数$\varphi,\Phi \in \mathrm{R}^\alpha$，使得对于任意$x \in [a,b]$有$\varphi \leqslant f^{(2\alpha)}(x) \leqslant \Phi$，则有

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\varphi \leqslant M_f^\alpha \leqslant$$

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{4^\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\Phi。$$

证明 在定理 8 中取$c=b-a$即可得证。

注 5 在定理 8 中取$c=0, x=a$，则得到文献[4]中的定理 7。

定理 9 设条件同定理 7，则有

$$\left|\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t) - \frac{(b-a-c)^\alpha}{(b-a)^\alpha}\times\right.$$

$$\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^\alpha} - \frac{c^\alpha}{(b-a)^\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+$$

$$\frac{(c+a-b)^\alpha\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha(1+2\alpha)}\left(x-\frac{3a+b-c}{4}\right)^\alpha\times$$

$$\left.\left[f^{(\alpha)}(a+b-x)-f^{(\alpha)}(x)\right] - \frac{\Gamma^2(1+\alpha)\mu(x)}{(b-a)^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}S\right|$$

$$\leqslant \frac{M}{4^\alpha\Gamma(1+2\alpha)}(\Phi-\varphi) \tag{23}$$

证明 由广义 Grüss 不等式(引理 7)得

$$\left|\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}{}_aI_b^{(\alpha)}h(t)f^{(2\alpha)}(t)-\right.$$

$$\left.\left[{}_aI_b^{(\alpha)}h(t)\right]\left[{}_aI_b^{(\alpha)}f^{(2\alpha)}(t)\right]\right| \leqslant \frac{(b-a)^{2\alpha}M}{4^\alpha\Gamma^2(1+\alpha)}(\Phi-\varphi), \tag{24}$$

依次利用引理 4，引理 5 和引理 2，可得到

$${}_aI_b^{(\alpha)}h(t)f^{(2\alpha)}(t) = J_\alpha(a,b,c,x;f),$$

$${}_aI_b^{(\alpha)}h(t) = \mu(x),$$

$${}_aI_b^{(\alpha)}f^{(2\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(b) - f^{(\alpha)}(a),$$

代入式(26)，然后乘以$\dfrac{\Gamma^2(1+\alpha)}{(b-a)^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}$，则式(23)得证。

注 6 在定理 9 中，若取$c=b-a$，则得到定理 6 中的式(15)。若取$x=a, c=0$，则得到定理 6 中的式(16)。

推论 3 设区间$I \subseteq \mathrm{R}$，I°是I的内部，$f: I^\circ \to \mathrm{R}^\alpha$，$a,b \in I^\circ$，$a<b$，$f \in D_\alpha[a,b]$，$f^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$，则有

$$\left|\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t) - \frac{1}{2^\alpha}\left[\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha\Gamma(1+2\alpha)}\frac{(b-a)^\alpha}{2^\alpha}\times$$

$$\left(\frac{7a+b}{8}-x\right)^\alpha\left[f^{(\alpha)}(a+b-x)-f^{(\alpha)}(x)\right]-$$

$$\frac{2^\alpha\Gamma^2(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha\Gamma(1+3\alpha)}\times$$

$$\left.\left[\left(\frac{b-a}{4}\right)^{3\alpha}+\left(\frac{3a+b}{4}-x\right)^{3\alpha}+(x-a)^{3\alpha}\right]S\right| \leqslant$$

$$\frac{(b-a)^{2\alpha}}{64^\alpha\Gamma(1+2\alpha)}(\Phi-\varphi)。$$

证明 在定理 9 中取$c=\dfrac{b-a}{2}$即可得证。

参考文献：

[1] Cerone P, Dragomir S S. Midpoint-type rules from an inequality point of view[M]. New York: CRC Press,2000:135-200.

[2] Cerone P, Dragomir S S.Trapezoidal-type rules from an inequality point of view[M]. New York: CRC Press,2000:65-134.

[3] Ujević N. Some double integral inequalities and applications[J]. Acta Math.Univ.Comenianae,2002，71(2):189-199.

(参考文献[4]- [18]转第 17 页)

的贡献率，表明债券融资在当前和今后一段时期的发展潜力明显大于股票融资的发展潜力。

由此不难看出，债券融资对经济增长的影响不容小觑，因此，在宏观经济调控中应该更加注重债券融资的发展潜力。其次债券融资和股票融资对经济增长的影响具有明显的区域效应和一定的时滞效应，因此，在宏观经济调控中应该采用差异化的宏观对策，并且进行适时适度地调控，以避免三个不同经济区域间的差距被进一步地拉大。

参考文献：

[1] Fanta A B, Makina D. Equity, Bonds, Institutional Debt and Economic Growth: Evidence from South Africa[J]. South African Journal of Economics, 2016, 3(2):1-12.

[2] 杜婕,邵学峰. 企业债券融资推动吉林省经济增长的实证分析[J]. 东北亚论坛,2007,16(4):74-78.

[3] 罗文波,安水平. 资本市场融资、经济增长与产业结构升级[J]. 证券市场导报,2012(4):47-54.

[4] 左良. 直接融资促进经济增长的内在机理研究[J]. 金融与经济,2015(12):38-42.

[5] 熊启月,张一茹. 货币政策信贷渠道的经济区域效应研究——基于我国31个省际面板数据的经验证据[J]. 投资研究,2012(7):78-89.

[6] Love I.,Zicchino L. Financial development and dynamic investment behavior: Evidence from panel VAR[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance,2006(2): 190-210.

[7] 白仲林. 面板数据的计量经济分析[M]. 天津:南开大学出版社,2008.

[8] 马慧慧. Stata 统计分析与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2016.

(上接第 7 页)

[4] Budak H,Sarikaya M Z,Yildirim H. New inequalities for local fractional integrals[J].Iranian Journal of Science and Technology,Transactions A: Science,2017,41(4): 1039-1046.

[5] Yang X J. Advanced local fractional calculus and its applications[M].New York：World Science Publisher，2012.

[6] Yang X J. Local fractional functional analysis and its applications[M].Asian Academic Publisher Limited，2011.

[7] 杨小军,李磊,杨然. 一元不可微函数的局部分数阶定积分的问题[J].世界科技研究与发展,2009,31(4)：722-724.

[8] Mo H X, Sui X, Yu D Y. Generalized convex functions on fractal sets and two Related inequalities[C].Abstract and Applied Analysis.Hindawi,2014,2014:1-7.

[9] Choi J，Set E,Tomar M. Certain generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals[J]. Commun.Korean Math,Soc,2017.

[10] Ostrowski A. Über die absolute abweichung einer differentiebaren funktion von ihren integralmittelwert [J]. Comment Math Helv,1938(10):226-227.

[11] Sarikaya M, Budak H. Generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2017,145(4): 1527-1538.

[12] 匡继昌.常用不等式[M].3 版.济南:山东科学技术出版社,2010:64.

[13] Dragomir S S,Wang S. An inequality of Ostrowski-Grüss' type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for home numerical quadrature rules[J].Computers Math.Applic.,1997,33 (11):15-20.

[14] Marko M，Pečarić J，Ujević N. Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss type[J].Computers Math.Applic.,2000,39(3) :161-175.

[15] Cheng X L.Improvement of some Ostrowski-Grüss type inequalities[J].Computers Math. Applic.,2001,42(1): 109-114.

[16] Anastassiou G A.Multidimensional Ostrowski inequalities, revisited[J].Acta Mathematica Hungarica，2002， 97(4)：339-353.

[17] 桑建芝. Ostrowski 不等式理论及在概率上的应用[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013.

[18] Sarikaya M Z,Tunc T,Budak H. On generalized some integral inequalities for local fractional integrals[J]. Applied Mathematics and Computation,2016,276: 316-323.