文章编号：1674-8085(2019)02-0001-05

相对于余挠对的内射模和投射模

*何东林，李煜彦

(陇南师范高等专科学校数信学院，甘肃，陇南　742500)

摘　要：设 t=(C，F)是一个完全的遗传的余挠对。给出 t−N−内射模和是 t−N−投射模的概念，研究 t−N−内射模和 t−N−投射模的若干性质和等价刻画。

关键词：余挠对；t−N−内射模；t−N−投射模

中图分类号：O153　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2019.02.001

INJECTIVE AND PROJECTIVE MODULES RELATIVE TO COTORSION PAIR

*HE Dong-lin, LI Yu-yan

(Department of Mathematics, Longnan Teachers College, Longnan, Gansu 742500, China)

Abstract: Let $t=$ (C,F) be a complete hereditary cotorsion pair. In this paper, we give the definitions of t−N−injective modules and t−N−projective modules , and investigate some properties andequivalent characterizations of t−N−injective and t−N−projective modules.

Key words: cotorsion pair; t−N−injective modules; t−N−projective modules

1　预备知识

内射模和投射模是同调代数的重要组成部分。很多作者先后对其进行了研究和推广[1-6]。2014 年 Mehdi 和 Mohanad[7]讨论了相对于挠理论的纯内射模。受此启发，本文主要研究关于余挠对 $t=$ (C，F)的内射模和投射模，并讨论其相关性质和等价刻画。文中的环 R 均指有单位元的结合环，模指酉左 R- 模。$N\le M$ 表示 N 是 M 的子模。称模 M 是 N-内射模，如果对任意单同态 $\alpha:K\to N$，任意同态 $f:K\to M$，都存在同态 $g:N\to M$ 使得 $f=g\alpha$。称模 P 是 N-投射模，如果对任意满同态 $\beta:N\to F$，任意同态 $f:P\to F$，都存在同态 $g:P\to N$ 使得 $f=\beta g$ [8]。设 C，F 是两个左 R-模类。记 C$^{\perp}$={模 $M|$ 对任意 $C\in$ C 都有 $Ext_A^1(C,M)=0$ }。$^{\perp}$F={模 $M|$ 对任意 $F\in$ F 都有 $Ext_A^1(M,F)=0$ }。称 $t=$ (C,F)是余挠对，如果 C$^{\perp}$= F 且 $^{\perp}$F = C。称余挠对 $t=$ (C，F)是完全的，如果对任意左 R-模 M 都有以下正合列：$0\to F\to C\to M\to 0$ 和 $0\to M\to F'\to C'\to 0$，其中 $F,F'\in$ F 且 $C,C'\in$ C。称余挠对 $t=$ (C,F)是遗传的，如果 C 关于满同态的核封闭，等价地 F 关于单同态的余核封闭[7-10]。下文中 $t=$ (C,F)均指完全的遗传的余挠对。

2　$t-$ 子模

定义 2.1　设 $N\le M$。如果 $M/N\in$ C，则称 N 是 M 的 t-子模。记作 $N\le^t M$。

先讨论 t-子模的性质。

收稿日期：2018-12-03；修改日期：2019-01-26
基金项目：甘肃省高等学校科研项目(2018A-269)，陇南师范高等专科学校校级科研重点项目(2016LSZK01003)
作者简介：*何东林(1983-)，女，甘肃白银人，讲师，硕士，主要从事同调代数研究(E-mail: hdl7979085@163.com);
李煜彦(1983-)，男，甘肃西和人，讲师，硕士，主要从事环模理论研究(E-mail: nwnulyy@126.com).

命题 2.1 设$N \le^t M$，$F \in$ F。则对任意同态α：$N \to F$，都存在同态$\beta: M \to F$使得$\beta i = \alpha$（其中i为包含同态）。

证明 由$N \le^t M$得正合列$0 \to N \xrightarrow{i} M \to M/N \to 0$，其中$i$为包含同态且$M/N \in$ C。

因为$t = $(C，F)均指完全的遗传的余挠对，所以 C$^{\perp}$= F 。由$F \in$ F 知，上面短正合列在函子$Hom_R(-,F)$下仍正合。

可见$Hom_R(M,F) \to Hom_R(N,F)$是满同态。因此对任意同态$\alpha$：$N \to F$，都存在同态$\beta: M \to F$，使得$\beta i = \alpha$。

命题 2.2 设$K \le M$，$N \le^t M$且$K + N = M$，则$K \cap N \le^t K$。

证明 要证$K \cap N \le^t K$，只需证$K/K \cap N \in$C。由$N \le^t M$知$M/N \in$C。又因为

$$K/K \cap N \cong K+N/N = M/N$$

所以$K/K \cap N \in$C。因此$K \cap N \le^t K$。

命题 2.3 设M是左R-模，则总存在模U，使得M同构于U的某个t-子模。

证明 由$t = $(C，F)是完全的遗传的余挠对知，存在正合列$0 \to M \xrightarrow{f} F \to C \to 0$，其中$F \in$ F 且$C \in$C。可见$M \cong f(M) \le^t C$。令$C = U$，则命题得证。

3 相对于余挠对的内射模

定义 3.1 称模M是t-N-内射模，如果对任意单同态$\alpha: K \to N$(其中$\alpha(K) \le^t N$)，任意同态$f: K \to M$，都存在同态$g: N \to M$使得$f = g\alpha$。

如果对任意模N，都有M是t-N-内射模，则称M是t-内射模。由命题 2.1 和定义 3.1 易知 F 中的模一定是t-内射模。下面讨论t-N-内射模与t-内射模的性质和刻画。

定理 3.1 设M, N是左R-模，则以下条件等价

(1) M是t-N-内射模;

(2) 对任意正合列$0 \to K \xrightarrow{i} N \to N/K \to 0$，其中$K \le^t N$且$i$为包含同态，用函子$Hom_R(-,M)$作用所得序列仍正合。

(3) 对任意正合列$0 \to K \xrightarrow{f} N \to C \to 0$，其中$C \in$C，用函子$Hom_R(-,M)$作用所得序列仍正合。

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 对任意正合列$0 \to K \xrightarrow{f} N \to C \to 0$，其中$C \in$ C 。由于$N/f(K) \cong C$，所以$N/f(K) \in$C。从而$f(K) \le^t N$。由M是t-N-内射模及其定义知，对任意同态$\phi: K \to M$，都存在同态$g: N \to M$使得$gf = \phi$。即$Hom_R(N,M) \to Hom_R(K,M)$为满同态。

注意到$Hom_R(-,M)$是左正合函子，所以用函子$Hom_R(-,M)$作用于$0 \to K \xrightarrow{f} N \to C \to 0$后所得序列仍正合。

(3)$\Rightarrow$(2) 显然成立。

(2)$\Rightarrow$(1)对任意单同态$\alpha: K \to N$，其中$\alpha(K) \le^t N$。存在同构$h: K \to \alpha(K)$。对任意同态$f: K \to M$，考虑正合列

$$0 \to \alpha(K) \xrightarrow{i} N \to N/\alpha(K) \to 0$$

由(2)知函子$Hom_R(-,M)$作用于该正合列所得序列仍正合。从而$Hom_R(N,M) \to Hom_R(\alpha(K),M)$为满同态。从而存在$\gamma$：$N \to M$使得$fh^{-1} = \gamma i$。由于$h$是同构，两边同乘以$h$可得$f = \gamma i h = \gamma\alpha$。因此$M$是$t$-$N$-内射模。

引理 3.1 设$(M_i)_{i\in I}$是一族左R-模，则$\prod_{i\in I} M_i$是t-N-内射模$\Leftrightarrow$每个M_i $(i \in I)$均为t-N-内射模。

证明 ($\Rightarrow$) 对任意正合列$0 \to K \xrightarrow{i} N \to C \to 0$，其中$K \le^t N$且$i$为包含同态，用函子$Hom_R(-,M_i)$及$Hom_R(-,\prod_{i\in I} M_i)$分别作用于该正合列。由$Hom$函子的性质及$\prod_{i\in I} M_i$是$t$-$N$-内射模可得如下正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \prod_{i\in I} Hom_R(C,M_i) & \to & \prod_{i\in I} Hom_R(N,M_i) & \xrightarrow{\prod_{i\in I} i^*} & \prod_{i\in I} Hom_R(K,M_i) & & \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
0 & \to & Hom_R(C,\prod_{i\in I} M_i) & \to & Hom_R(N,\prod_{i\in I} M_i) & \to & Hom_R(K,\prod_{i\in I} M_i) & \to & 0
\end{array}$$

可见$\prod_{i\in I} i^*$为满同态，从而i^*是满同态。从而
$0\to Hom_R(C,M_i)\to Hom_R(N,M_i)\to Hom_R(K,M_i)\to 0$
正合。

由定理 3.1 知M_i $(i\in I)$均为t-N-内射模。

$(\Leftarrow)$ 对任意正合列$0\to K\xrightarrow{i} N\to C\to 0$，其中$K\le^t N$且$i$为包含同态，用函子$Hom_R(-,M_i)$及$Hom_R(-,\prod_{i\in I}M_i)$分别作用于该正合列。由 Hom 函子的性质及$\prod_{i\in I}M_i$是$t$-$N$-内射模可得如下正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(C,M_i) & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(N,M_i) & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(K,M_i) & \to & 0\\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
0 & \to & Hom_R(C,\prod_{i\in I}M_i) & \to & Hom_R(N,\prod_{i\in I}M_i) & \to & Hom_R(K,\prod_{i\in I}M_i) & &
\end{array}$$

可见下行也正合。由定理3。1 知$\prod_{i\in I}M_i$是t-N-内射模。

由上面的引理易得如下两个推论。

推论 3.1 设M是t-N-内射模，则M的直和因子也是t-N-内射模。

推论 3.2 设$M_i(i=1,2,\cdots,n)$是t-N-内射模，则$\coprod_{i=1}^{n}M_i$也是t-N-内射模。

定理 3.2 设M是t-N-内射模，则对任意$N_1\le N$，都有M是t-N/N_1-内射模。

证明 对任意正合列

$$0\to K/N_1\xrightarrow{i} N/N_1\to C\to 0$$

其中$K/N_1\le^t N/N_1$，且i为包含同态。

因为$N/K\cong \dfrac{N/N_1}{K/N_1}\in$C，所以$K\le^t N$。对任意$f:K/N_1\to M$，考虑$f\pi:K\to M$，其中$\pi$: $K\to K/N_1$为标准投射。由M是t-N-内射模知，存在$g:N\to M$使得$f\pi=g\varepsilon$，其中$\varepsilon:K\to M$是包含同态。

令$h:N/N_1\to M$，$h(x+N_1)=g(x)$。若$x_1+N_1=x_2+N_1$，则$x_1-x_2\in N_1\subseteq K$，从而

$$\begin{aligned}&h(x_1+N_1)-h(x_1+N_1)=g(x_1)-g(x_2)=\\&g(x_1-x_2)=g(\varepsilon(x_1-x_2))=\\&f\pi(x_1-x_2)=f(x_1-x_2+N_1)=0\end{aligned}$$

可见$h(x_1+N_1)=h(x_2+N_1)$，h是映射。由模同态的定义易证h是同态。注意到对任意$x+N_1\in K/N_1$，有$hi(x+N_1)=h(x+N_1)=g(x)=g\varepsilon(x)=f\pi(x)=f(x+N_1)$，即$hi=f$，因此$M$是$t$-$N/N_1$-内射模。

定理 3.3 设M是t-N-内射模，则对任意$N_1\le^t N$，都有M是t-N_1-内射模。

证明 设$N_1\le^t N$，对任意正合列$0\to K\xrightarrow{i} N_1\to K/N_1\to 0$，其中$K\le^t N_1$且$i$为包含同态。而$K\le^t N_1$，$N_1\le^t N$且$N/N_1\cong \dfrac{N/K}{N_1/K}$，在正合列 $0\to N_1/K\to N/K\to N/N_1\to 0$中$N_1/K$，$N_1/K\in$C。由于$t=$(C，F)是余挠对，C 关于扩张封闭，所以$N/K\in$C 即$K\le^t N$。由$M$是$t$-$N$-内射模知，对任意同态$f:K\to M$，都存在同态$g:N\to M$使得$f=g\varepsilon$，其中$\varepsilon$: $K\to N$为包含同态。令δ: $N_1\to N$为包含同态，显然有$\varepsilon=\delta\ i$。令$h=g\delta$，则可得$f=g\varepsilon=g\delta\ i=hi$。

由t-N-内射模的定义及定理 3.1 知M是$t-N_1-$内射模。

由上面的定理易得如下推论。

推论 3.3 设M是t-N-内射模，$0\to N_1\to N\to N_2\to 0$为模短正合列且$N_2\in$C，则$M$既是$t$-$N_1$-内射模，又是$t$-$N_2$-内射模。

推论 3.4 设M,N是左R-模，则以下条件等价

(1)M是t-N-内射模；

(2)对任意$N_1\le N$，都有M是$t-N/N_1-$内射模；

(3)对任意$N_1\le^t N$，都有M是t-N_1-内射模。

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 由定理 3.2 易证。(2)$\Rightarrow$(1) 取

$N_1=0$，则易得M是t-N-内射模。

(1)$\Rightarrow$(3) 由定理3.3易证。(3)$\Rightarrow$(1) 取$N_1=N$，显然$N/N_1\in$C。则由条件(3)可得M是t-N-内射模。

4 相对于余挠对的投射模

定义 4.1 称模P是t-N-投射模，如果对任意满同态$\beta:N\to C$(其中$Ker\beta\le^t N$)，任意同态$f:P\to C$，都存在同态$g:P\to N$使得$f=\beta g$。

进而，如果对任意模N，都有P是t-N-投射模，则称P是t-投射模。下面讨论t-N-投射模与t-投射模的性质和等价刻画。

定理 4.1 设P是左R-模，则以下条件等价

(1) P是t-N-投射模；

(2)对任意正合列$0\to K\to N\xrightarrow{\pi} N/K\to 0$，其中$K\le^t N$且$\pi$为标准投射，用$Hom_R(P,-)$作用所得序列

$$0\to Hom_R(P,K)\to Hom_R(P,N)\xrightarrow{\pi_*}Hom_R(P,N/K)\to 0$$

仍正合；

(3)对任意正合列$0\to K\to N\xrightarrow{\beta}C\to 0$，其中$C\in$C，用函子$Hom_R(P,-)$作用所得序列

$$0\to Hom_R(P,K)\to Hom_R(P,N)\xrightarrow{\beta_*}Hom_R(P,C)\to 0$$

仍正合。

证明 (1)$\Rightarrow$(3) 设P是$t-N-$投射模。对任意正合列$0\to K\to N\xrightarrow{\beta}C\to 0$，其中$C\in$C。考虑满同态$N\xrightarrow{\beta}C$。由定义4.1知对任意同态$f:P\to C$，都存在同态$g:P\to N$，使得$f=\beta g$。可见$\beta_*$为满同态。结合函子$Hom_R(P,-)$的左正合性易知结论成立。

(3)$\Rightarrow$(2) 显然成立。

(2)$\Rightarrow$(1)对任意满同态$\beta:N\to C$，其中$Ker\beta\le^t N$。令$K=Ker\beta$，则存在同构γ: $C\to N/K$且$K\le^t N$。对任意同态$f:P\to C$，有$\gamma f:P\to N/K$，由条件(2)可得存在同态$g:P\to N$使得$\gamma f=\pi g$(其中π为标准投射)。从而$f=\gamma^{-1}\pi g=\beta g$。因此$P$是$t$-$N$-投射模。

引理 4.1 设$(P_i)_{i\in I}$是一族左R-模，则$\coprod_{i\in I}P_i$是t-N-投射模$\Leftrightarrow$每个$P_i\ (i\in I)$均为t-N-投射模。

证明 设$\coprod_{i\in I}P_i$是t-N-投射模，对任意正合列$0\to K\to N\xrightarrow{\pi}N/K\to 0$，其中$K\le^t N$且$\pi$为标准投射，用函子$Hom_R(P_i,-)$及$Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,-)$分别作用于该正合列。由Hom函子的性质可得如下正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(P_i,K) & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(P_i,N) & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(P_i,N/K) & & \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
0 & \to & Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,K) & \to & Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,N) & \to & Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,N/K) & \to & 0
\end{array}$$

可见上行正合，同态$\prod_{i\in I}Hom_R(P_i,N)\to\prod_{i\in I}Hom_R(P_i,N/K)$为满同态，由直积的性质易知$Hom_R(P_i,N)\to Hom_R(P_i,N/K)$也是满同态。根据定理4.1得每个$P_i\ (i\in I)$均为$t$-$N$-投射模。

$(\Leftarrow)$ 设每个$P_i\ (i\in I)$均为t-N-投射模。对任意正合列$0\to K\to N\xrightarrow{\pi}N/K\to 0$，其中$K\le^t N$且$\pi$为标准投射，用函子$Hom_R(P_i,-)$及$Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,-)$分别作用于该正合列。由$Hom$函子的性质可得如下正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(P_i,K) & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(P_i,N) & \to & \prod_{i\in I}Hom_R(P_i,N/K) & \to & 0\\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
0 & \to & Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,K) & \to & Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,N) & \to & Hom_R(\coprod_{i\in I}P_i,N/K) & &
\end{array}$$

可见下行也正合。由定理 4.1 得 $\coprod_{i\in I} P_i$ 是 t-N-投射模。

定理 4.2 设 P 是 t-N-投射模，则对任意 $N_1 \le N$，都有 P 是 t-N/N_1-投射模。

证明 对任意满同态 $N/N_1 \xrightarrow{\beta} C \to 0$，其中 $Ker\beta \le^t N/N_1$。考虑满同态 $\beta\pi$：$N \to C$（其中 π：$N \to N/N_1$ 为标准投射)。由 P 是 t-N-投射模知，对任意同态 $f: P \to C$，都存在同态 $h: P \to N$ 使得 $f = \beta\pi h$。

令 $g: P \to N/N_1$，$g(x) = h(x) + N_1$(其中 $x \in P$)。易知 g 为同态且

$$\beta g(x) = \beta(h(x) + N_1) = \beta\pi h(x) = f(x).$$

即 $f = \beta g$。根据定义 4.1 知 P 是 t-N/N_1-投射模。

推论 4.3 设 P 是 t-N-投射模，则对 N 的每个同态像 L，都有 P 是 t-L-投射模。

定理 4.3 设 P 是 t-N-投射模，则对任意 $N_1 \le^t N$，都有 P 是 t-N_1-投射模。

证明 设 $N_1 \le^t N$，对任意正合列 $0 \to K \to N_1 \xrightarrow{\pi_1} K/N_1 \to 0$，其中 $K \le^t N_1$ 且 π_1 为标准投射。而 $K \le^t N_1$，$N_1 \le^t N$ 且 $N/N_1 \cong \dfrac{N/K}{N_1/K}$，在正合列 $0 \to_1 N_1/K \to N/K \to N/N_1 \to 0$ 中 N_1/K，$N/N_1 \in$C。由于 $t=$(C，F)是余挠对，C 关于扩张封闭，所以 $N/K \in$C 即 $K \le^t N$。

由 P 是 t-N-投射模知，对任意同态 $f: P \to N_1/K$，考虑 $if: P \to N/K$(其中 i 为包含同态)，都存在同态 $g: P \to N$，使得 $if = \pi_2 g$（其中 π_2：$N \to N/K$ 为标准投射)。因为

$$\pi_2(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im}(\pi_2 g) = \operatorname{Im}(if) = i(\operatorname{Im} f) \le N_1/K$$

所以 $\operatorname{Im} g \le N_1$。不妨令 h：$P \to N_1$，$h(x) = g(x)$。则对任意 $x \in P$ 有

$$\pi_1 h(x) = h(x) + K = g(x) + K = \pi_2 g(x) = if(x) = f(x),$$

可见 $\pi_1 h = f$，因此 P 是 t-N_1-投射模。

由上面的定理易得如下推论。

推论 4.4 设 P 是 t-N-投射模，$0 \to N_1 \to N \to N_2 \to 0$ 为模短正合列且 $N_2 \in$C。则 P 既是 t-N_1-投射模，又是 t-N_2-投射模。

推论 4.5 设 N 是左 R-模，则以下条件等价

(1) P 是 t-N-投射模;

(2)对任意 $N_1 \le N$，都有 M 是 t-N/N_1-投射模。

(3)对任意 $N_1 \le^t N$，都有 M 是 t-N_1-投射模。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 4.2 易证。(2) $\Rightarrow$ (1) 取 $N_1 = 0$，则易得 P 是 t-N-内射模。

(1) $\Rightarrow$ (3) 由定理 3.3 易证。(3) $\Rightarrow$ (1) 取 $N_1 = N$，显然 $N/N_1 \in$C。则由条件(3)可得 P 是 t-N-内射模。

参考文献：

[1] Mao L X, Ding N Q. FP-projective dimensions[J]. Comm Algebra, 2005, 33(4):1153-1170.

[2] Mao L X, Ding N Q. Relative projective modules and relative injective modules[J]. Comm. Algebra, 2006, 34: 2403-2418.

[3] Holm H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of pure and applied algebra, 2004, 189(1-3): 167-193.

[4] Bennis D, Mahdou N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 210(2): 437-445.

[5] Abbas M S. On relative pure injective modules[J]. Al-Mustansiriyah Journal of Science, 2010, 21(6): 374-382.

[6] Wang L. Strongly n-Ding projective and injective modules under change of rings[J]. International Research Journal of pure Algebra， 2017, 7(3): 509-512.

[7] Abbas M S, Hamid M F. Pure Injective Modules Relative to Torsion Theories[J]. International Journal of Algebra, 2014, 8(4): 187-194.

[8] Anderson F W, Fuller K R. Rings and categories of modules[M]. Springer: SpringerScience & Business Media, 2012.

[9] Enochs E E, Jenda O M G. Relative homological algebra [M]. New York: Walter de Gruyter, 2000.

[10] 佟文廷.同调代数引论[M].北京：高等教育出版社,1996.