

文章编号: 1674-8085(2018)04-0017-04

代数基本定理的拓扑证明及推广

*孙艳红, 高会双

(内蒙古民族大学数学学院, 内蒙古, 通辽 028000)

摘 要: 拓扑学是一个新兴的数学分支, 用于研究拓扑空间在连续映射下的性质。20 世纪后, 拓扑学发展为数学中一个非常重要的领域, 拥有大量重大成果: 代数拓扑学中的庞加莱猜想的证明是新世纪最瞩目的数学成果; 拓扑学在数学其他领域、物理学、化学、生物学、计算机科学、经济学中都有广泛的应用。文中主要给出代数基本定理的代数拓扑方法的证明及推广, 并得出了一种复空间上的不动点原理。

关键词: 拓扑; 同伦; 基本群; 代数基本定理化

中图分类号: O152

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2018.04.004

A TOPOLOGICAL PROOF AND GENERALIZATION FOR FUNDAMENTAL THEOREM OF ALGEBRA

*SUN Yan-hong, GAO Hui-shuang

(College of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao, Inner Mongolia 028000, China)

Abstract: Topology is a rising branch of Mathematics, which studies the properties of topological spaces under continuous mappings. After twentieth Century, the topology has become a very important field in Mathematics, and it has a lot of significant results. The proof of Poincare's conjecture in algebraic topology is the most remarkable achievement in the new century; Topology is widely used in other areas of mathematics, topology, physics, chemistry, biology, computer science and Economics. Fundamental theorem of algebra was proved and expanded by algebraic topology in this article, and then we obtained the fixed point theorem on complex space.

Key words: topology; homotopy; fundamental group; fundamental theorem of algebra

0 引言

代数拓扑学是拓扑学的一个分支, 即使用代数方法研究拓扑学问题的学科。代数拓扑学的主要研究工具有同伦、同调、胞腔同调、上同调等。一维的同伦群称为基本群。基本群是由拓扑空间的同伦关系诱导的一个群。基本群在代数拓扑具有重要作用, 可以用于研究两个拓扑空间是否同胚, 对拓扑空间进行分类, 描述拓扑空间连通性等。

代数基本定理可以表述为: 任意复系数多项

式在复数域内至少有一根, 这说明了代数运算在复数域中的封闭性。代数基本定理是代数学中一个非常重要且基础的定理, 在代数学内与外都有广泛的应用。

由于该定理涉及领域很广, 其证明方法有很多, 据称目前已有 200 多种证明方法。该定理最初由法国数学家达朗贝尔最早给出证明, 此后欧拉与拉格朗日也先后给出证明, 但这些证明均有一些缺陷。通常认为该命题的证明最早由高斯于 1799 年给出。此后他又给出了三个证明, 其中最

收稿日期: 2018-01-22; 修改日期: 2018-04-19

基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金项目(2016MS0118); 内蒙古民族大学校级项目(NMDYB15020)

作者简介: *孙艳红(1984-), 女, 内蒙古赤峰人, 讲师, 硕士, 主要从事拓扑学的研究(E-mail:240899343@qq.com);

高会双(1981-), 女, 内蒙古通辽人, 副教授, 硕士, 主要从事矩阵理论和算子代数的研究(E-mail:gaohuishuang@163.com).

后一个证明多项式系数可以为复数。

本文在第一部分中列出了所使用的一些预备知识;第二部分给出了其拓扑证明以及其扩展命题的拓扑证明,以及它的应用。

1 预备知识

1.1 同伦群与基本群

同伦关系与基本群是将几何问题转化为代数问题的有力工具。本节将介绍相关概念及性质。

定义 1^[1] 设 $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ 为连续映射,若存在连续映射 $H: X \times I \rightarrow Y$, 使

$$H(x, 0) = f_0(x), H(x, 1) = f_1(x), x \in X$$

则称映射 f_0 同伦于 f_1 。 f_0 称 H 为到 f_1 的同伦。

定义 2^[1] 记 $\Omega(X, x_0)$ 为拓扑空间 X 中所有经过定点 x_0 的回路集合,由相对同伦得出 $\Omega(X, x_0)$ 上的等价关系 $\sim$, 定义基本群 $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim$ 。

基本群是一个同伦不变量,即任意两个同伦的拓扑空间具有相同的基本群。直观上看,两个空间同伦,则一个空间可以连续形变成另一个空间。常见的基本群有:

单点集、 n 维欧氏空间、 n 维球等空间的基本群为独异点,即只有一个元素的群。

平面上的圆环的基本群为无限循环群 Z 。

环面的基本群为两个无限循环群直积 $Z \times Z$ 。

性质 1^[1] 设 X, Y 为拓扑空间, F 为 f_0 到 f_1 的同伦,记 $\omega(s) = F(0, s)$, 显然 $\omega(s)$ 为连接 y_0 与 y_1 的一个道路, 则有 $\omega_0 f_0 = f_1$ 。

1.2 代数基本定理及推论

定理 1^[2] (代数基本定理) 设 $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_0$ 是一个复数多项式, $a_n \neq 0, n \geq 1$, 则有一复数 z 使 $f(z) = 0$ 。

推论 1^[3] 每个 $n \geq 0$ 次多项式有且只有 n 个复根(重根按照重数计算)。

推论 2^[3] 若多项式 $f(z), g(z)$ 的次数不超

过 $n, n \geq 1$, 且存在 $n-1$ 个不同的复数 $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ 使 $f(z_i) = g(z_i), i = 1, 2, \dots, n+1$, 则 $f(z) = g(z)$ 。

推论 3^[3] 任意给定 n 个数 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则存在唯一一个次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(z)$, 其在 n 个不同的点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 处的函数值分别为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则 $f(z)$ 由如下公式唯一确定:

$$f(z) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\pi \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq k} (z - \alpha_j)}{\pi \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)}$$

2 代数基本定理的拓扑证明、推广及应用

本节将使用代数拓扑学中的同伦群与基本群证明代数基本定理证明。之后将代数基本定理适用范围扩展,并证明一个复数域上的不动点判定方法。

2.1 代数基本定理的拓扑证明

证明 不妨设 $a_n = 1$, 约定用复数 S^1 上的点表示。

反证法 设对任意 $z \in C$, 有 $f(z) \neq 0$, 因此有 $a_0 \neq 0$ 。定义映射 $G, H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ 为:

$$G(z, t) = \frac{f(tz)}{|f(tz)|}, z \in S^1 \subset C, t \in I, \\ H(t, z) = \begin{cases} \frac{z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \dots + t^n a_0}{|z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \dots + t^n a_0|}, & z \in S^1, t \in (0, 1] \\ z^n, & z \in S^1, t = 0 \end{cases}$$

易知 $G(z, t)$ 连续, 注意到 $H(z, t)$ 可变形为 $\frac{t^n f(z/t)}{|t^n f(z/t)|}$, 故在 $t \in (0, 1]$ 时有 $\left| \frac{t^n f(z/t)}{|t^n f(z/t)|} \right| \neq 0$ 且 $H(z, t)$ 连续, 由于

$$H(z, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} H(z, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \dots + t^n a_0}{|z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \dots + t^n a_0|} = \frac{z^n}{|z^n|} = z^n$$

因此 $H(z, t)$ 在定义域上连续。记 $g_t(z) = G(z, t), h_t(z) = H(z, t)$, 于是 G 为 g_0 到 g_1 的同伦, H 为 h_0 到 h_1 的同伦, 而 $g_1 = h_1$, 因此 g_0 与 h_0 同伦, 其中 $g_0 = a_0 / |a_0| = a_1$ 是常值映射, 而 $h_0(z) = z^n, z \in S^1$ 。

记 $\alpha(t)e^{znt}$, 则有 $h_0(\alpha(t)) = e^{z\pi nit}$ 。易知 $[\alpha] \in \pi_1(S^1, e_0)$ 是生成元, $h_0[\alpha] = [\alpha]^n$ 。但由性质 1 有

$$h_0[\alpha] = \omega_* g_0[\alpha],$$

其中 $\omega_*: \pi_1(S^1, e_1) \rightarrow \pi_1(S^1, e_0)$ 是同构。而 $g_0[\alpha] = e \in \pi_1(S^1, e_1)$ 是单位元, 由 $h_0[\alpha] = \omega_* g_0[\alpha]$ 知 $[\alpha]^n$ 是单位元, 矛盾。因此必存在一点 z 使 $f(z) = 0$ 。

此证明使用反证法, 假设定理错误, 推出了一个定点与一个圆环同伦, 矛盾, 因而定理成立。

借助代数基本定理可以得出许多有用的推论。此外, 本节的证明只涉及了多项式函数的连续性和一个与极限有关的性质, 因此可以将代数基本定理的适用范围推广, 推广命题将在 2.2 中进行讨论。

2.2 代数基本定理的推广

本节将代数基本定理的适用范围从全体多项式推广到满足一定条件的一类函数全体。下述命题的证明与代数基本定理的证明相似。

命题 1 设 $f: C \rightarrow C$ 是复平面的连续的自映射且对某一正整数 n , 有非零极限 $z_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) \neq 0$, 则一定存在一点 z , 使得 $f(z) = 0$ 。

证明 此命题的证明方法与代数基本定理的代数拓扑证明方法相似:

利用反证法 设存在某函数 $f: C \rightarrow C$ 连续且存在非零极限 $z_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) \neq 0$, 但任意一点 z , 有 $f(z) \neq 0$ 。

定义映射 $G, H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ 为

$$G(z, t) = \frac{f(tz)}{|f(tz)|}, \quad z \in S^1 \subset C,$$

$$H(z, t) = \begin{cases} t^n f\left(\frac{z}{t}\right), & z \in S^1, t \neq 0 \\ \frac{z_0}{|z_0|} z^n, & t = 0 \end{cases}$$

在 $t=0$ 时, $|t^n f(z/t)| \neq 0$, 由 $z_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) \neq 0$ 知

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(z, t)}{|H(z, t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^n f(z/t)}{|t^n f(z/t)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \dots + t^n a_0}{|z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \dots + t^n a_0|} = \frac{z^n}{|z^n|} = z^n$$

因此 G, H 连续。

同上一个证明, 记 $g_t(z) = G(z, t), h_t(z) = H(z, t)$, 则 G 为 g_0 到 g_1 的同伦, H 为 h_0 到 h_1 的同伦。又由 $g_1 = \frac{f(z)}{|f(z)|} = h_1$ 。知 g_0 与 h_0

同伦。 $g_0 = \frac{f(0)}{|f(0)|} = e_1$ 是常值映射, 而 $h_0(z) = \frac{z_0}{|z_0|} z^n, z \in S^1$ 。

记 $\alpha(t) = e^{znt}$, 则 $h_0(\alpha(t)) = \frac{z_0}{|z_0|} e^{z\pi nit}$ 。易知 $[\alpha] \in \pi_1(S^1, e_0)$ 是生成元, 且 $h_0[\alpha] = [\alpha]^n$, 但根据性质 1 有

$$h_0[\alpha] = \omega_* g_0[\alpha],$$

其中 $\omega_*: \pi_1(S^1, e_1) \rightarrow \pi_1(S^1, e_0)$ 是同构映射。

由于 $g_0[\alpha] = e \in \pi_1(S^1, e_1)$ 是单位元, 根据 $h_0[\alpha] = \omega_* g_0[\alpha]$ 知 $[\alpha]^n$ 是单位元, 矛盾。因此必有 $z \in C, f(z) = 0$ 。证毕。

可见, 2.2 中的证明方法存在一般性, 其适用于比多项式更多的一类函数中。

2.3 推广命题的应用

上一节的结论可以用于讨论复空间上的一类

连续映射的不动点:

推论 设 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ 连续, 且对某正整数

n , 有 $z_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) \neq 0$, 且 n 与 z_0 不同时为 I ,

则 f 有映射不动点, 即存在一点 z 使 $f(z) = z$ 。

证明 设函数 $f(z)$ 满足题设, 则由 $z_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) \neq 0$, 有

$$z_1 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} (f(z) - z) = z_0 - \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{1-n},$$

当 n 与 z_0 不同时为 I 时有 $z_1 \in C$, 由命题 1 知存在一点 z , $f(z) - z = 0$, 故 $f(z) = z$, 证毕。

当 $n = z_0 = 1$, $f(z)$ 可表示为 $f(z) = z + g(z)$, 其中 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-1} g(z) = 0$ 。

若 $g(z) = 0$, $f(0) = 0$ 为不动点; 若 $g(z) = c$, $c \neq 0$, 映射 $f(z)$ 没有不动点; 其它情况较为复杂, 本文不再讨论。事实上, 推论中 n 的取值范围可以改为 n 是自然数: 由于 $n=0$ 时有 $f(z) - z$ 满足命题 1, 因此有一点 $f(z) = z$ 成立。

3 结语

代数基本定理可以用不同角度、方法和学科知识加以证明, 这反映了数学不同学科之间广泛存在的内在联系, 以及代数问题与几何问题相互转化的思想。

从本文中可以看出, 代数拓扑可以非常简洁地描述空间的连续性, 连通性等性质, 并使用代数方法进行推理。在讨论复杂的欧氏空间和映射时, 很难直观地想象问题的形态, 使用代数拓扑可以有效地避免这种困难。因此, 代数拓扑可以作为解决几何问题的一种有力的工具使用。

参考文献:

- [1] 周建伟. 代数拓扑讲义[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [2] 北京大学数学系. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] 王骁力, 李涛. 代数学基本定理的推论及其应用[J]. 南阳师范学院学报, 2014, 13(3): 4-8.