

文章编号: 1674-8085(2018)03-0001-04

一类四阶椭圆型方程的高能解的存在性

吕定洋

(湖南第一师范学院数学与计算科学学院, 湖南, 长沙 410205)

摘 要: 研究了一类四阶椭圆型方程的高能解的存在性, 在对非线性项作新的假设条件下, 利用临界点理论得到了方程无穷多高能解的存在性结果, 对非线性项所作的假设比已有文献的假设要弱。

关键词: 四阶椭圆型方程; 临界点理论; 对称山路定理; 高能解

中图分类号: O175

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2018.03.001

EXISTENCE OF INFINITELY MANY LARGE SOLUTIONS FOR THE FOURTH-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

LV Ding-yang

(Department of Mathematics, Hunan First Normal University, Changsha, Hunan 410205, China)

Abstract: We study the existence of infinitely many high energy solutions for a class of fourth-order elliptic equations. Under new assumptions on nonlinearity f , by using critical point theory, we obtain infinitely many large solutions for the equations. our assumptions on nonlinearity f are weaker than the existing results.

Key words: fourth-order elliptic equations; critical point theory; symmetric mountain pass theorem; high energy solutions

0 引言

考虑如下非线性四阶椭圆型方程

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u + V(x)u = f(x, u), x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 。

已经有很多学者研究了方程(1.1), 见文献[1-3]。在文献[1]中, Yin 和 Wu 研究了方程(1.1), 得到了(1.1)高能解的两个存在性结果。在文献[2]中, Ye 和 Tang 在如下的假设下, 得到了(1.1)高能解的存在性结论:

$$(V1) \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \geq a > 0, \forall M > 0,$$

$$meas\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\} < +\infty$$

(f1) 存在

$$a_1 > 0, p \in (2, 2_*) \left(2_* = \frac{2N}{N-4}, N > 4; 2_* = +\infty, N \leq 4 \right)$$

$$\text{使得 } |f(x, t)| \leq a_1 (|t| + |t|^{p-1}), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

$$(f2) \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(x, t)}{t^2} = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N, F(x, t) \geq 0,$$

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds.$$

(f3) 存在 $\theta \geq 1$, 使得

$$\theta G(x, t) \geq G(x, st), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \forall s \in [0, 1],$$

$$G(x, t) := tf'(x, t) - 2F(x, t).$$

$$(f4) f(x, -t) = -f(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

其中 (f2), (f3) 是超二次条件, 与常见的 (AR) 条件互为补充。

收稿日期: 2018-03-07; 修改日期: 2018-04-16

作者简介: 吕定洋(1968-), 男, 湖南邵阳人, 副教授, 硕士, 主要从事偏微分方程临界点理论研究(E-mail:hncsydy@126.com)。

定理 A 假设(V1),(f1)-(f4)成立, 那么方程(1.1)具有无穷多解 $\{u_k\}$, 使得

$$\frac{1}{2} \int_{R^N} (|\Delta u_k|^2 + |\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2) dx - \int_{R^N} F(x, u_k) dx \rightarrow +\infty, k \rightarrow \infty.$$

在本文中, 将进一步研究方程(1.1)高能解的存在性, 并给出如下更一般的超二次条件来代替(f2)和(f3):

$$(f2') \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{|F(x, u)|}{|u|^2} = \infty, a.e. x \in R^N, \text{ 且存在}$$

$r_0 \geq 0$, 使得 $F(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in R^N \times R, |u| \geq r_0$.

$$(f5) F(x, u) := \frac{1}{2} u f(x, u) - F(x, u) \geq 0, \text{ 且存在}$$

$c_0 > 0, \kappa > \max\{1, \frac{N}{4}\}$, 使得

$$|F(x, u)|^\kappa \leq c_0 |u|^{2\kappa} F(x, u), \forall (x, u) \in R^N \times R, |u| \geq r_0.$$

定理 1 假设(V1),(f1),(f2'),(f4),(f5)成立, 则方程(1.1)具有无穷多高能解。

注 1: 在定理中, $F(x, u)$ 是允许变号的, 即使在 $F(x, u) \geq 0$ 的情形, 给出的假设(f2'),(f5)也似乎比已有文献中的假设要弱。

注 2: 本文给出的条件去掉了几乎所有文献中所做的 $\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0$ 的假设, 容易验证如下非线性项 f 满足(f2'),(f5):

$$f(x, u) = a(x) u \ln \left(\frac{1}{2} + |u| \right), a \in C(R^N, R),$$

$$0 < \inf_{R^N} a < \sup_{R^N} a < \infty.$$

1 变分框架和主要引理

设

$X := \{u \in H^2(R^N) \mid \int_{R^N} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx < +\infty\}$
那么 X 是一个希尔伯特空间。内积为 $\langle u, v \rangle = \int_{R^N} (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x)uv) dx$, 范数为 $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ 。

因为 X 连续嵌入 $L^r(R^N) (2 \leq r \leq 2^*)$ 。因此

存在 $\tau_r > 0$, 使 $\|u\|_r \leq \tau_r \|u\|, \forall u \in X$ 更进一步, 在(V)的假设下, 按照文献[6]引理 2.2, 可知 X 紧嵌入 $L^r(R^N) (2 \leq r < 2^*)$ 。

为了寻找问题(1.1)的弱解, 将考虑如下定义在 X 上的泛函:

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_{R^N} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \int_{R^N} F(x, u) dx$$

在上面的假设下, 易知 $\varphi \in C^1(X, R)$, 且

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_{R^N} (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x)uv) dx - \int_{R^N} f(x, u)v dx, \forall u, v \in X.$$

2 主要结果的证明

引理 1 (对称山路定理) 设 X 为一无限维的 Banach 空间, $X = Y \oplus Z$, 其中 Y 是有限维的。如果 $I \in C^1(X, R)$ 满足(C)_c 条件($c > 0$), 且

$$(I1) I(0) = 0, I(-u) = I(u), \forall u \in X;$$

$$(I2) \text{ 存在常数 } \rho, \alpha > 0, \text{ 使得 } I|_{\partial B_\rho \cap Z} \geq \alpha;$$

(I3) 对任一无穷维空间 $\tilde{X} \subset X$, 存在 $R = R(\tilde{X}) > 0$, 使得 $I(u) \leq 0$ 对 $u \in \tilde{X}/B_R$, 那么 I 具有一无界临界值序列。

引理 2 在假设(V1),(f1),(f2'),(f5)下, 满足 $\varphi(u_n) \rightarrow c > 0, \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0$ 的序列 $\{u_n\} \subset X$ 在 X 中是有界的。

证明: 为了证明 $\{u_n\}$ 的有界性。用反证法。

假设 $\|u_n\| \rightarrow \infty$. 设 $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}, \|v_n\| = 1$, 且

$$\|v_n\| \leq \gamma_s \|v_n\| = \gamma_s, 2 \leq s < 2^*.$$

$$c + 1 \geq \varphi(u_n) - \frac{1}{2} \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle = \int_{R^N} F(x, u_n) dx$$

(1)

$$\text{因为 } \int_{R^N} \frac{|F(x, u_n)|}{\|u_n\|^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2},$$

$$\text{所以 } \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{R^N} \frac{|F(x, u_n)|}{\|u_n\|^2} dx \geq \frac{1}{2}$$

对 $0 \leq a < b$, 令

$$\Omega_n(a, b) = \{x \in R^N : a \leq |u_n(x)| < b\}$$

在子列的意义下, 我们假设在 X 中 v_n 弱收敛于 v , 那么 $v_n \rightarrow v$ 在 $L^s(R^N)$ 中, $2 \leq s < 2^*$, $v_n \rightarrow v.a.e.R^N$.

如果 $v=0$, 那么 $v_n \rightarrow 0$ 在 $L^s(R^N)$ 中, $2 \leq s < 2^*$, $v_n \rightarrow 0.a.e.R^N$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n(0, r_0)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 dx \leq \\ & \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \\ & \int_{\Omega_n(0, r_0)} |v_n|^2 dx \leq \\ & \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \int_{R^N} |v_n|^2 dx \end{aligned} \quad (2)$$

令 $\kappa' = \kappa/\kappa - 1. \because \kappa > \max\{1, N/4\}$, 则 $2\kappa' \in (2, 2_*)$.

因此从(f5)和(1)知

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 dx \leq \\ & \left[\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \left(\frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} \right)^\kappa dx \right]^{\frac{1}{\kappa}} \left[\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} |v_n|^{2\kappa'} dx \right]^{\frac{1}{\kappa'}} \leq \\ & c_0^{\frac{1}{\kappa}} \left[\int_{\Omega_n(r_0, \infty)} F(x, u_n) dx \right]^{\frac{1}{\kappa}} \left[\int_{R^N} |v_n|^{2\kappa'} dx \right]^{\frac{1}{\kappa'}} \leq \\ & [c_0(c+1)]^{\frac{1}{\kappa}} \left[\int_{R^N} |v_n|^{2\kappa'} dx \right]^{\frac{1}{\kappa'}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3)$$

结合(2), (3)可知

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} dx = \int_{\Omega_n(0, r_0)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 dx + \\ & \int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} |v_n|^2 dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

这与 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{R^N} \frac{|F(x, u_n)|}{|u_n|^2} dx \geq \frac{1}{2}$ 矛盾。

令 $A := \{x \in R^N : V(x) \neq 0\}$. 如果 $v \neq 0$, 那么

$meas(A) > 0$. 对 $a.e.x \in A$. 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)| = \infty$. 因

此 $A \subset \Omega_n(r_0, \infty)$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c + o(1)}{\|u_n\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|^2} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \int_{R^N} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx \right] = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \int_{\Omega_n(0, r_0)} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx - \int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx \right] \leq \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \int_{R^N} |v_n|^2 dx - \int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx \right] \leq \\ & \frac{1}{2} + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \gamma_2^2 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n(r_0, \infty)} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx = \\ & \frac{1}{2} + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \gamma_2^2 - \\ & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{R^N} \frac{|F(x, u_n)|}{u_n^2} [\chi_{\Omega_n(r_0, \infty)}(x)] v_n^2 dx \leq \\ & \frac{1}{2} + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \gamma_2^2 - \\ & \int_{R^N} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|F(x, u_n)|}{u_n^2} [\chi_{\Omega_n(r_0, \infty)}(x)] v_n^2 dx = -\infty, \end{aligned} \quad (4)$$

矛盾。所以 $\{u_n\}$ 在 X 中有界。

引理 3 在假设(V1), (f1), (f2'), (f5)下, 满足 $\varphi(u_n) \rightarrow c, \varphi'(u_n) \rightarrow 0$ 的 $\{u_n\} \subset X$, 在 X 中有一个收敛子列。

证明: 引理 2 已证明 $\{u_n\}$ 在 X 中有界, 那么在子列的意义下, 可以假设在 X 中 u_n 弱收敛于 u , 在 $L^s(R^N)$ ($2 \leq s < 2_*$) 中, $u_n \rightarrow u$ 。

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= \langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u \rangle + \\ & \int_{R^N} [f(x, u_n) - f(x, u)](u_n - u) dx \end{aligned}$$

因为 u_n 弱收敛于 u , 所以

$$\langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u \rangle \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} [f(x, u_n) - f(x, u)](u_n - u) dx \leq \\ & \int_{R^N} [|f(x, u_n)| + |f(x, u)] |u_n - u| dx \leq \end{aligned}$$

$$\int_{R^N} \left[(c_1 |u_n| + c_2 |u_n|^{p-1}) + (c_1 |u| + c_2 |u|^{p-1}) \right] |u_n - u| dx \leq \\ c_1 \left(\int_{\Omega} (|u_n|^2 + |u|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ c_2 \left[\left(\int_{\Omega} |u_n|^{p-1-\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |u|^{p-1-\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

因为在 $L^s(R^N)$ ($2 \leq s < 2_*$) 中, $u_n \rightarrow u$,

$$\int_{R^N} [f(x, u_n) - f(x, u)](u_n - u) dx \rightarrow 0$$

所以 $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ 。

即 $\{u_n\}$ 在 X 中有一个收敛子列。

引理 4 假设 $(V1), (f1), (f2')$ 成立, 则对有限维的空间 $\tilde{X} \subset X$, 有 $\varphi(u) \rightarrow -\infty$, $\|u\| \rightarrow \infty, u \in \tilde{X}$ 。

证明: 反设 $\{u_n\} \subset \tilde{X}, \|u_n\| \rightarrow \infty$, 存在 $M > 0$, 使得 $\varphi(u_n) \geq -M, n \in N$ 。

令 $v_n = u_n / \|u_n\|$, 则 $\|v_n\| = 1$ 。设在 X 中 v_n 弱收敛于 v , 因为 $\tilde{X}$ 是有限维的, 那么在 X 中 $v_n \rightarrow v \in \tilde{X}, v_n \rightarrow v a.e. R^N$, 则 $\|v\| = 1$ 。那么可以南 (4) 的讨论一样得出矛盾。

推论 1 在 $(V1), (f1), (f2')$, 对任意有限维的空间 $\tilde{X} \subset X$, 存在 $R = R(\tilde{X}) > 0$, 使得 $\varphi(u) \leq 0, \forall u \in \tilde{X}, \|u\| \geq R$ 。

设 $\{e_j\}$ 是 X 的标准正交基, $X_j = \text{Re}_j$, $Y_k = \bigoplus_{j=1}^k X_j, Z_k = \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} X_j, k \in Z$ 。则 $X = Y_k \oplus Z_k$ 。

引理 5 在假设 $(V1), (f1), (f2')$ 下, 对 $2 \leq s < 2_*, \beta_k(s) := \sup_{u \in Z_k, \|u\|=1} \|u\|_s \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 。

根据引理 5, 可选择 $m \geq 1$, 使

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{2a_1} \|u\|^2, \|u\|_p^p \leq \frac{1}{4a_2} \|u\|^p, \forall u \in Z_m。$$

引理 6 在假设 $(V1), (f1)$ 下, 存在 $\rho, \alpha > 0$, 使得 $\varphi|_{\partial B_\rho \cap Z_m} \geq \alpha$ 。

证明: $\varphi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{R^N} F(x, u) dx \geq$

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{a_1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{a_2}{p} \|u\|_p^p \geq$$

$$\frac{1}{4} (\|u\|^2 - \|u\|^p) =$$

$$\frac{2^{p-2}-1}{2^{p+2}} : \alpha, \forall u \in Z_m, \|u\| = \frac{1}{2} := \rho$$

定理 1 的证明: 令 $Y = Y_k, Z = Z_k$ 。显然 φ 满足引理 1 的所有条件, 所以 $\varphi(u)$ 具有一无界临界值序列, 方程 (1.1) 具有无穷多高能解。

参考文献:

- [1] Yin Y, Wu X. High energy solutions and nontrivial solutions for fourth-order elliptic equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 375(2): 699-705.
- [2] Ye Y, Tang C L. Infinitely many solutions for fourth-order elliptic equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 394(2): 841-854.
- [3] Liu J, Chen S X, Wu X. Existence and multiplicity of solutions for a class of fourth-order elliptic equations in R^N [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 395(2): 608-615.
- [4] Zhang Q, Xu B. Multiplicity of solutions for a class of semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 377(2): 834-840.
- [5] Tang X H. Infinitely many solutions for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential and nonlinearity[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 401(1): 407-415.
- [6] Zhang W, Tang X, Zhang J. Infinitely many solutions for fourth-order elliptic equations with sign-changing potential[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2014, 18(2): 645-659.