文章编号：1674-8085(2018)02-0005-09

关于广义 Taylor 中值定理中间点函数可微性的进一步讨论

张芯语，*张树义

（渤海大学数理学院，辽宁，锦州 121013）

摘　要：使用新的分析方法进一步研究广义 Taylor 中值定理“中间点函数”的可微性，在一定条件下，运用 Gamma 函数，建立了广义 Taylor 中值定理“中间点函数”在点 a 处的一阶可微性，从而改进和推广了有关文献中的相应结果。

关键词：广义 Taylor 中值定理；中间点函数；可微性

中图分类号：O171　**文献标识码**：A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2018.02.002

FURTHER DISCUSS ON DIFFERENTIABILITY OF INTERMEDIATE POINT FUNCTION FOR GENERALIZED TAYLOR MEAN VALUE THEOREM

ZHANG Xin-yu，*ZHANG Shu-yi

(College of Mathematics and Physics，Bohai University，Jinzhou,Liaoning 121013, China)

Abstract: The purpose of this paper is further to study the differentiability of intermediate point function in generalized Taylor mean value theorem by using a new analytical method. Under certain conditions, the first order differentiability at a point of the intermediate point function for generalized Taylor mean value theorem are established by using Gamma function, which improve and extend the corresponding results of some reference.

Key words: generalized Taylor mean value theorem; intermediate point function; differentiability

Azpeitja[1]研究了 Taylor 公式“中间点”的渐近性质。同时，Jacobson[2]建立积分中值定理的类似的结果。在这之后，一些作者研究各种中值定理“中间点”的渐近性质，可见文献[3-18]。最近，我们在文献[19-26]中研究了包括广义 Taylor 中值定理在内的几种中值定理的“中间点函数”的一阶可微性。其中文献[18]研究了 Cauchy 中值定理“中间点函数”

$$\overline{c}(x)=\begin{cases} c(x), x\in(a,a+\delta) \\ a, \quad x=a \end{cases}$$（以下简写为 $\overline{c}(x)$）

在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}^{(1)}(a)=\frac{1}{2}$。文献[19]和文献[20]在一定条件下分别建立了泰勒公式和广义 Taylor 中值定理的“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}^{(1)}(a)=\left(\frac{n!\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$。文献[21]在一定条件下建立了 Cauchy 中值定理“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}^{(1)}(a)=\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$。文献[22]建立了广义中值定理“中间点函数” $\overline{c}(x)$

收稿日期：2017-01-13；修改日期：2017-02-18

作者简介：张芯语(1994-)，女，辽宁铁岭人，硕士生，主要从事非线性泛函分析方面的研究(E-mail:zhangdabao0901@163.com);
*张树义(1960-)，男，辽宁锦州人，教授，主要从事非线性泛函分析方面的研究(E-mail:jzzhangshuyi@126.com).

在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}_n^{(1)}(a)=1-\left(\frac{(m-1)!C_n^{(\psi)}\sigma}{(n-1)!C_m^{(\varphi)}}\right)^{\frac{1}{m-n}}$。文献[23]建立了高阶 Cauchy 中值定理“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}_n^{(1)}(a)=\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j (n-j)^{n+\alpha}}{n^{\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$。文献[24]利用比较函数概念，建立了泰勒公式“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 的渐近性 $\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(a+(x-a)\theta(x))}{\varphi(x)}=\frac{n!}{C_n^{(\varphi)}}$，进而推出了文献[19]的可微性结论。文献[25]建立了积分中值定理“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}_n^{(1)}(a)=\left(\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1}\right)^{1/\alpha}$。文献[25]建立了第二积分中值定理“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}_n^{(1)}(a)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\right)^{1/(\beta+1)}$。

本文的目的是进一步研究广义 Taylor 中值定理“中间点函数”的可微性，在一定条件下获得了广义 Taylor 中值定理“中间点函数” $\overline{c}(x)$ 在 $x=a$ 处的可微性且 $\overline{c}^{(1)}(a)=\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$，**显然此结果**推广了文献[18-21]中的相关结果(事实上取 $\alpha=0,n=\gamma=1$ 便得文献[18]中的结果；取 $\alpha=0,\gamma=\lambda,g(x)=(x-a)^n$ 便得文献[19]中的结果；取 $\alpha=0,\gamma=\lambda$ 便得文献[20]中的结果；取 $\alpha=0,\gamma=\lambda,n=1,$ 便得文献[21]中的结果)。

广义 Taylor 中值定理 设 a 和 b 是实数且 $a<b$，$f,g:[a,b]\to R$。如果函数 f 满足

(i) 在 $[a,b]$ 上具有直至 $n-1$ 阶连续导数；

(ii) 在 (a,b) 内存在 n 阶导数且 $g^{(n)}(x)\neq 0$，则存在一点 $c\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{g(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

这里需指出广义 Taylor 中值定理“中间点”唯一的充分条件是：$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 是单射。

设 I 是 R 上一区间，$a\in I$ 是 I 上一点，函数 $f,g:I\to R$。如果函数 f 与 g 在 I 上 n 次可微，则由广义 Taylor 中值定理，$\forall x\in I-\{a\}$，在以 a,x 为端点的开区间上，存在一点 c_x，使

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c_x)}{g^{(n)}(c_x)} \tag{1}$$

如果 $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 是单射，则点 c_x 是唯一的，进而可以定义 $c:I-\{a\}\to I-\{a\}$ 为 $c(x)=c_x$，使得

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))} \tag{2}$$

如果 $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 不是单射的，则使(1)成立的点 c_x，一般不是唯一的。如果对 $\forall x\in I-\{a\}$，在以 a,x 为端点的开区间上选取一个 c_x，使(1)成立，那么也可以定义函数 $c:I-\{a\}\to I-\{a\}$ 为 $c(x)=c_x$，使(2)成立。

定理 1[20] 设 I 是 R 上一区间，$a\in I$ 是 I 上一点. 函数 $f,g:I\to R$。如果函数 f 与 g 在 I 上 n 次可微，则存在一函数 $c:I-\{a\}\to I-\{a\}$，使得(2)成立。此外如果 $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 是单射的，则点 $c(x)$ 是唯一的。

因为 $\forall x\in I-\{a\}$，$|c(x)-a|\le|x-a|$，所以 $\lim_{x\to a}c(x)=a$。于是可定义“中间点函数” $\overline{c}:I\to I$

为$\overline{c}(x)=\begin{cases}c(x), x\in I-\{a\},\\ a, \quad x=a.\end{cases}$显然$\overline{c}(x)$在点$x=a$连续。

容易证明下列引理成立。

引理 1 设I是R上一区间，$a\in I$是区间I的左端点，$\psi: I\to R$在I上n次可微且

$$\lim_{x\to a^+}\psi^{(n)}(x)/(x-a)^{\alpha}=A$$

$$\tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\dfrac{\psi(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{n+\alpha}}, & x\in I-\{a\},\\ \dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}, & x=a,\end{cases}$$

则下列结论成立：

(i) $\tilde{\psi}(x)$在I上连续且$\tilde{\psi}(a)=\dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$；

(ii) 当$\alpha=0$时，则$\tilde{\psi}(a)=\dfrac{A}{n!}=\dfrac{\psi^{(n)}(a)}{n!}$；

(iii) $\psi(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+$

$$\left(\frac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi\right)(x-a)^{n+\alpha},$$

其中A是一常数，α是实数$\alpha>-1$，$\xi\to 0(x\to a^+)$。

注 1 因为$a\in I$是区间I的左端点，所以$\tilde{\psi}(x)$在点a处连续是指在点a右连续。由于$\lim\limits_{x\to a^+}\tilde{\psi}(x)=\dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=\tilde{\psi}(a)$，因此$\tilde{\psi}(x)$在点$a$右连续。

1 主要结果

定理 2 设I是R上一区间，$a\in I$是区间I的左端点，函数$f,g: I\to R$满足下列条件：

(i) 函数f与g在区间I上有n阶导数且$g^{(n)}(x)\neq 0$；

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+}f^{(n)}(x)/(x-a)^{\alpha}=A$，

$\lim\limits_{x\to a^+}g^{(n)}(x)/(x-a)^{\beta}=B$，

(iii) $Bf^{(n)}(a)\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}\neq$

$$Ag^{(n)}(a)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)},$$

其中A,B是非零常数，α,β是实数$\alpha>-1,\beta>-1$，且$\alpha\neq\beta$，则下列结论成立：

1° 存在实数$\delta>0$，使$(a,a+\delta)\subseteq I$，且$\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$f^{(n)}(x)\tilde{g}(x)\neq\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)$，其中

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{n+\alpha}}, & x\in(a,a+\delta),\\ \dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}, & x=a,\end{cases}$$

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{n+\beta}}, & x\in(a,a+\delta),\\ \dfrac{B\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}, & x=a,\end{cases}$$

2° 若再设$\forall x\in(a,a+\delta),\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\right)'\neq 0$，则对于任意$x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数$c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))} \quad (3)$$

3° 函数$\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a},\quad x\in(a,a+\delta) \quad (4)$$

有下列性质：

a) 对于任意$x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))} \quad (5)$$

b) 存在极限

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

4° 函数$\bar{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$定义为

$$\bar{c}(x)=\begin{cases}c(x),x\in(a,a+\delta),\\ a,\quad x=a\end{cases}$$

在$x=a$可微且

$$\bar{c}^{(1)}(a)=\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

证明 1° 由定理2条件和引理1，有

$$\lim_{x\to a^+}\left(f^{(n)}(x)\tilde{g}(x)-\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)\right)=\frac{Bf^{(n)}(a)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}-\frac{Ag^{(n)}(a)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\neq 0,$$

因此存在一实数$\delta>0$，使$(a,a+\delta)\subseteq I$且$\forall x\in(a,a+\delta)$，有$f^{(n)}(x)\tilde{g}(x)\neq\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)$.

2° 因$\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\right)'\neq 0$，所以$\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$在$(a,a+\delta)$上严格单调，进而$\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$是单射，因此存在唯一函数$c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使得(3)成立。

3° a) 由(3)和(4)即得证。b) 由引理1，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\left(\frac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi_1\right)(x-a)^{n+\alpha}\tag{6}$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\left(\frac{B\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}+\xi_2\right)(x-a)^{n+\beta}\tag{7}$$

其中$\xi_1\to 0,\ \xi_2\to 0\left(x\to a^+\right)$。由条件(ii)，得

$$f^{(n)}\left(a+(x-a)\theta(x)\right)=\left(A+\xi_3\right)\left((x-a)\theta(x)\right)^{\alpha}\tag{8}$$

$$g^{(n)}\left(a+(x-a)\theta(x)\right)=\left(B+\xi_4\right)\left((x-a)\theta(x)\right)^{\beta}\tag{9}$$

其中$\xi_3\to 0,\ \xi_4\to 0\left(x\to a^+\right)$。把(6)-(9)代入(5)，得

$$\frac{\left(\dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi_1\right)(x-a)^{n+\alpha}}{\left(\dfrac{B\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}+\xi_2\right)(x-a)^{n+\beta}}=\frac{\left(A+\xi_3\right)\left((x-a)\theta(x)\right)^{\alpha}}{\left(B+\xi_4\right)\left((x-a)\theta(x)\right)^{\beta}}$$

由上面等式，可推出

$$\left(\frac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi_1\right)\left(B+\xi_4\right)\left((x-a)\theta(x)\right)^{\beta}(x-a)^{n+\alpha}=\left(A+\xi_3\right)\left(\frac{B\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}+\xi_2\right)\left((x-a)\theta(x)\right)^{\alpha}(x-a)^{n+\beta}\tag{10}$$

注意到$\xi_1\to 0$，$\xi_2\to 0$，$\xi_3\to 0$，$\xi_4\to 0\left(x\to a^+\right)$和$|(x-a)\theta(x)|\le|x-a|$，由(10)，有

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

4° 结论4°由3°推出。定理2证毕。

如果$\alpha=\beta$，则定理2不再成立，但有：

定理3 设I是R上一区间，$a\in I$是区间I的左端点，函数$f,g:I\to R$满足下列条件：

(i) 函数f与g在区间I上有n阶导数且$g^{(n)}(x)\neq 0$；

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+}\left[f^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)\right]/(x-a)^{\gamma}=D$，

其中D,A,B是非零常数，γ是实数$\gamma>-1$，则下列结论成立：

1° 存在实数$\delta>0$，使$(a,a+\delta)\subseteq I$，且$\forall x\in(a,a+\delta)$，有$\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)\neq 0$，其中

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-(A/B)\left[g(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]}{(x-a)^{n+\gamma}}, & x\in(a,a+\delta),\\[2ex] \dfrac{D\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}, & x=a,\end{cases}$$

2° 若再设$\forall x\in(a,a+\delta)$，$\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\right)'\neq 0$，则对于任意$x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数$c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))} \tag{11}$$

3° 函数$\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a},\quad x\in(a,a+\delta) \tag{12}$$

有下列性质：

c) 对于任意$x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))} \tag{13}$$

d) 存在极限

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$$

4° 函数$\overline{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$定义为

$$\overline{c}(x)=\begin{cases}c(x), x\in(a,a+\delta),\\ a,\quad x=a\end{cases}$$

在$x=a$可微且

$$\overline{c}^{(1)}(a)=\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$$

证明 首先指出定理3 的条件保证了$\gamma\neq\alpha$。事实上，若$\gamma=\alpha$，则

$$\lim_{x\to a^+}\left[f^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)\right]/(x-a)^{\gamma}=$$
$$\lim_{x\to a^+}\left(f^{(n)}(x)/(x-a)^{\alpha}\right)-(A/B)\lim_{x\to a^+}\left(g^{(n)}(x)/(x-a)^{\alpha}\right)=$$
$$A-(A/B)B=0$$

与此极限值$D\neq 0$相矛盾，故$\gamma\neq\alpha$。

1° 由定理3条件和引理1，有

$$\lim_{x\to a^+}\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)=\frac{Dg^{(n)}(a)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}\neq 0,$$

因此存在一实数$\delta>0$，使$(a,a+\delta)\subseteq I$且$\forall x\in(a,a+\delta)$，有$\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)\neq 0$。

2° 因为$\left(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)\right)'\neq 0$，所以$f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$在$(a,a+\delta)$上严格单调，进而$f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$是单射，因此存在唯一函数$c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使得(11)成立。

3° a) 由(11)和(12)即得证。b) 由引理1，有

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-$$
$$(A/B)\left[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=$$
$$\left(\frac{D\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}+\xi_1\right)(x-a)^{n+\gamma} \tag{14}$$

$$g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=$$
$$\left(\frac{B\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi_2\right)(x-a)^{n+\alpha} \tag{15}$$

其中$\xi_1\to 0,\ \xi_2\to 0\left(x\to a^+\right)$。由条件(ii)，得

$$f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))=$$
$$(A/B)g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))+ \tag{16}$$
$$(D+\xi_3)((x-a)\theta(x))^{\gamma}$$

$$g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))=(B+\xi_4)((x-a)\theta(x))^{\alpha} \tag{17}$$

其中$\xi_3\to 0,\ \xi_4\to 0\left(x\to a^+\right)$。把(14)-(17)代入(13)，并简单运算得

$$(B+\xi_4)((x-a)\theta(x))^{\alpha}(A/B)$$
$$\left(\frac{B\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi_2\right)(x-a)^{n+\alpha}+$$
$$(B+\xi_4)((x-a)\theta(x))^{\alpha}\left(\frac{D\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}+\xi_1\right)(x-a)^{n+\gamma}=$$
$$\left(\frac{B\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}+\xi_2\right)(x-a)^{n+\alpha}$$
$$\left[(A/B)(B+\xi_4)((x-a)\theta(x))^{\alpha}+(D+\xi_3)((x-a)\theta(x))^{\gamma}\right]$$

整理得

$$\left(B+\xi_4\right)\left(\left(x-a\right)\theta\left(x\right)\right)^{\alpha}\left(\frac{D\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(n+\gamma+1\right)}+\xi_1\right)\left(x-a\right)^{n+\gamma}=$$
$$\left(\frac{B\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}+\xi_2\right)\left(x-a\right)^{n+\alpha}\cdot\left(D+\xi_3\right)\left(\left(x-a\right)\theta\left(x\right)\right)^{\gamma} \tag{18}$$

注意到 $\xi_1\to 0$，$\xi_2\to 0$，$\xi_3\to 0$，$\xi_4\to 0\left(x\to a^+\right)$ 和 $\left|\left(x-a\right)\theta\left(x\right)\right|\le\left|x-a\right|$，由(18)，可推出 $\lim\limits_{x\to a}\theta\left(x\right)=\left(\dfrac{\Gamma\left(\gamma+1\right)\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n+\gamma+1\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$。

4° 结论 4° 由 3° 推出，定理 3 证毕。

注 2 由于 2° 中的条件 $\left(f^{(n)}\left(x\right)/g^{(n)}\left(x\right)\right)'\neq 0$，只保证存在唯一函数 $c:\left(a,a+\delta\right)\to\left(a,a+\delta\right)$，使(11)成立，因此在定理 3 中如果 $\alpha=0,\gamma=1$，则该条件 $\left(f^{(n)}\left(x\right)/g^{(n)}\left(x\right)\right)'\neq 0$ 可以用 $f^{(n)}\left(a\right)g^{(n+1)}\left(a\right)-f^{(n+1)}\left(a\right)g^{(n)}\left(a\right)\neq 0$ 代替。事实上，当 $\alpha=0,\gamma=1$ 时，则 $A=f^{(n)}\left(a\right)$，$B=g^{(n)}\left(a\right)$。由引理 1 得

$$\tilde{f}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{f\left(x\right)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k-\dfrac{f^{(n)}\left(a\right)}{g^{(n)}\left(a\right)}\left[g\left(x\right)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{g^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k\right]}{\left(x-a\right)^{n+1}}, & x\in\left(a,a+\delta\right),\\[2ex] \dfrac{f^{(n+1)}\left(a\right)g^{(n)}\left(a\right)-f^{(n)}\left(a\right)g^{(n+1)}\left(a\right)}{\left(n+1\right)!g^{(n)}\left(a\right)}, & x=a,\end{cases}$$

进一步，如果函数 $f^{(n)}\left(x\right)$ 与 $g^{(n)}\left(x\right)$ 在 I 上可微，则由洛必达法和导数极限定理，有

$$\lim_{x\to a^+}\tilde{f}\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(a\right)g^{(n)}\left(a\right)-f^{(n)}\left(a\right)g^{(n+1)}\left(a\right)}{\left(n+1\right)!g^{(n)}\left(a\right)}=$$
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f\left(x\right)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k-\dfrac{f^{(n)}\left(a\right)}{g^{(n)}\left(a\right)}\left[g\left(x\right)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{g^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k\right]}{\left(x-a\right)^{n+1}}=$$
$$\frac{1}{\left(n+1\right)!}\lim_{x\to a^+}f^{(n+1)}\left(x\right)-\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{g^{(n)}\left(a\right)}\frac{1}{\left(n+1\right)!}\lim_{x\to a^+}g^{(n+1)}\left(x\right)=$$
$$\frac{1}{g^{(n)}\left(a\right)\left(n+1\right)!}\left[g^{(n)}\left(a\right)\lim_{x\to a^+}f^{(n+1)}\left(x\right)-f^{(n)}\left(a\right)\lim_{x\to a^+}g^{(n+1)}\left(x\right)\right]=$$
$$\frac{1}{g^{(n)}\left(a\right)\left(n+1\right)!}\left[f^{(n+1)}\left(a\right)g^{(n)}\left(a\right)-f^{(n)}\left(a\right)g^{(n+1)}\left(a\right)\right]$$

由此推出

$$\lim_{x\to a^+}\tilde{f}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)=$$
$$\frac{1}{\left(n+1\right)!g^{(n)}\left(a\right)}\cdot$$
$$\left[g^{(n)}\left(a\right)\lim_{x\to a^+}f^{(n+1)}\left(x\right)-f^{(n)}\left(a\right)\lim_{x\to a^+}g^{(n+1)}\left(x\right)\right]\lim_{x\to a^+}g^{(n)}\left(x\right)=$$
$$\frac{1}{\left(n+1\right)!g^{(n)}\left(a\right)}\lim_{x\to a^+}g^{(n)}\left(x\right)\cdot$$
$$\left[\lim_{x\to a^+}g^{(n)}\left(x\right)\lim_{x\to a^+}f^{(n+1)}\left(x\right)-\lim_{x\to a^+}f^{(n)}\left(x\right)\lim_{x\to a^+}g^{(n+1)}\left(x\right)\right]=$$
$$\frac{1}{\left(n+1\right)!}\lim_{x\to a^+}\left[f^{(n)}\left(x\right)g^{(n+1)}\left(x\right)-f^{(n+1)}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)\right]=$$
$$\frac{1}{\left(n+1\right)!}\left[f^{(n)}\left(a\right)g^{(n+1)}\left(a\right)-f^{(n+1)}\left(a\right)g^{(n)}\left(a\right)\right]\neq 0$$

因此存在 $\delta>0$，使 $\left(a,a+\delta\right)\subseteq I$，对 $\forall x\in\left(a,a+\delta\right)$，有 $\tilde{f}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)\neq 0$ 和 $f^{(n)}\left(x\right)g^{(n+1)}\left(x\right)-f^{(n+1)}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)\neq 0$，且

$$\left(f^{(n)}\left(x\right)/g^{(n)}\left(x\right)\right)'=$$
$$\left[f^{(n+1)}\left(x\right)g^{(n)}\left(x\right)-f^{(n)}\left(x\right)g^{(n+1)}\left(x\right)\right]/\left[g^{(n)}\left(x\right)\right]^2\neq 0$$

从而 $f^{(n)}\left(x\right)/g^{(n)}\left(x\right)$ 是单射，于是当 $\alpha=0$，$\gamma=1$ 时由定理 3 可得如下结果。

定理 4[20] R 上一区间，$a\in I$ 是 I 的左端点。$f,g:I\to R$ 是两个函数，满足下列条件

(i) 函数 f，g 在 I 上 $n+1$ 次可微；

(ii) 对于所有 $x\in \operatorname{int} I$，$g^{(n)}(x)\neq 0$；

(iii) $f^{(n)}(a)g^{(n+1)}(a)\neq f^{(n+1)}(a)g^{(n)}(a)$，则下列结论成立：

1° 存在一实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$，$x\in(a,a+\delta)$，有 $f^{(n)}(x)g^{(n+1)}(x)\neq f^{(n+1)}(x)g^{(n)}(x)$ 并且 $\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 是单射的。

2° 对于任意 $x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))}$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a},\quad x\in(a,a+\delta),$$

有下列性质：

e) 对于任意 $x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}$$

f) 存在极限

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\frac{1}{n+1}.$$

4° 函数 $\overline{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$ 定义为

$$\overline{c}(x)=\begin{cases}c(x), x\in(a,a+\delta),\\ a,\quad x=a\end{cases}$$

在 $x=a$ 可微且

$$\overline{c}^{(1)}(a)=\frac{1}{n+1}$$

下面我们指出由定理 3 可推出文[20]中的定理 2。

在定理 3 中取 $\alpha=0,\gamma=\mu$，则 $A=f^{(n)}(a)$，$B=g^{(n)}(a)$。由引理 1 得

$$D=\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)}{(x-a)^{\gamma}}=$$
$$\lim_{x\to a^+}\frac{g^{(n)}(a)f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)g^{(n)}(x)}{g^{(n)}(a)(x-a)^{\mu}}=$$
$$\frac{bg^{(n)}(a)-cf^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\neq 0$$

由引理 1 得

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\left[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]}{(x-a)^{n+\mu}}, & x\in(a,a+\delta),\\ \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\cdot\dfrac{bg^{(n)}(a)-cf^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}, & x=a,\end{cases}$$

进一步如果函数 $f^{(n)}(x)$ 与 $g^{(n)}(x)$ 在 I 上连续可微，则由洛必达法和导数的定义，有

$$\lim_{x\to a^+}\tilde{f}(x)=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\cdot\frac{bg^{(n)}(a)-cf^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}=$$
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\left[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]}{(x-a)^{n+\mu}}=$$
$$\frac{1}{g^{(n)}(a)}\cdot\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\left[\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{(x-a)^{\mu}}g^{(n)}(a)-\lim_{x\to a^+}\frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(a)}{(x-a)^{\mu}}f^{(n)}(a)\right]=$$

$$\frac{1}{g^{(n)}(a)}\left[\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^{n+\mu}}g^{(n)}(a)-\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^{n+\mu}}f^{(n)}(a)\right]=$$

$$\frac{1}{g^{(n)}(a)}\left[\lim_{x\to a^+}F(x)g^{(n)}(a)-f^{(n)}(a)\lim_{x\to a^+}G(x)\right]=$$

$$\frac{1}{g^{(n)}(a)}\left[\lim_{x\to a^+}F(x)\lim_{x\to a^+}g^{(n)}(x)-\lim_{x\to a^+}f^{(n)}(x)\lim_{x\to a^+}G(x)\right]=$$

$$\frac{1}{g^{(n)}(a)}\lim_{x\to a^+}\left[F(x)g^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)G(x)\right]$$

由此推出

$$\lim_{x\to a^+}\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)=$$

$$\lim_{x\to a^+}\left[F(x)g^{(n)}(x)-G(x)f^{(n)}(x)\right],$$

于是当$\alpha=0,\gamma=\mu$时由定理 3 可得如下结果。

定理 5[20] 设I是R上一区间，$a\in I$是区间I的左端点，函数$f,g:I\to R$满足下列条件：

(i) 函数f与g在区间 I 上有n阶连续导数且$g^{(n)}(x)\neq 0$；

(ii)存在实数$\alpha>0$，使

$$\lim_{x\to a^+}\left(f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)\right)\Big/(x-a)^{\alpha}=b,$$

$$\lim_{x\to a^+}\left(g^{(n)}(x)-g^{(n)}(a)\right)\Big/(x-a)^{\alpha}=c,$$

(iii) $cf^{(n)}(a)\neq bg^{(n)}(a)$，其中$b,c$是常数，则下列结论成立：

1° 存在实数$\delta>0$，使$(a,a+\delta)\subseteq I$，且$\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$f^{(n)}(x)G(x)\neq F(x)g^{(n)}(x)$，其中

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^{n+\mu}}, & x\in(a,a+\delta),\\[2ex] \dfrac{b\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}, & x=a,\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^{n+\mu}}, & x\in(a,a+\delta),\\[2ex] \dfrac{c\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}, & x=a.\end{cases}$$

2° 若再设$\forall x\in(a,a+\delta),\left(\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\right)'\neq 0$，则对于任意$x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数$c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))}.$$

3° 函数$\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a},\quad x\in(a,a+\delta),$$

有下列性质：

g) 对于任意$x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}=\frac{f^{(n)}\left(a+(x-a)\theta(x)\right)}{g^{(n)}\left(a+(x-a)\theta(x)\right)}.$$

h) 存在极限

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\left(\frac{n!\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

4° 函数$\overline{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$定义为

$$\overline{c}(x)=\begin{cases}c(x), x\in(a,a+\delta),\\ a, \quad x=a\end{cases}$$

在$x=a$可微且

$$\overline{c}^{(1)}(a)=\left(\frac{n!\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

需要指出的是由于$a\in I$是区间I的左端点，因此本文所涉及函数在点a的导数均为右导数。

参考文献：

[1] Azpeitja A G. On the Lagrange remainder of the Taylor formula[J]. Amer. Math. Monthly, 1982, 89(5): 311-312.

[2] Jacobson B. On the mean value theorem for integrals[J]. Amer. Math. Monthly, 1982, 89(5): 300-301.

[3] 张树义. 广义 Taylor 公式“中间点” 一个更广泛的渐近估计式[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(11): 173-176.

[4] Duca D I. A note on the mean value theorem[J]. Didactica Matematicii, 2003, 19: 91-102.

[5] Mera R. On the determination of the intermediate point in Taylor's theorem[J]. Amer. Math. Monthly, 1992, 99: 56-58.

[6] Powers R C, Riedel T, Sahoo P K. Limit properties of differential mean values[J]. J. Math. Anal. Appl. 1998, 227: 216-226.

[7] 张树义,赵美娜,郑晓迪.积分中值定理中间点的渐近估计式[J]. 北华大学学报:自然科学版，2016,17(4): 448-454.

[8] 万美玲,张树义. 二元函数 Taylor 公式“中间点”的渐近估计式[J]. 鲁东大学学报:自然科学版,2016, 32(2):1-4.

[9] 张树义. 中值定理“中间点”的几个新的渐近估计式[J]. 烟台师范学院学报:自然科学版, 1995,11(2):109-111.

[10] 张树义. 关于中值定理“中间点”渐近性的若干注记[J]. 烟台师范学院学报:自然科学版,1994,10(2): 105-110

[11] 林媛, 张树义. 广义泰勒中值定理“中间点"当 $x\to\infty$时更广泛的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版,2016, 15 (3): 1-5.

[12] 张树义. 积分中值定理“中间点”更广泛的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版,2005, 4(3).15-19.

[13] 张树义. 广义中值定理当$m\neq n$时 “中间点” 的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版, 2006, 5(12): 20-22.

[14] 张树义. 关于中值定理“中间点”渐近性研究的新进展(I)[J]. 南都学坛,2000(6): 13-20.

[15] 张树义. 积分中值定理“中间点”当$x\to\infty$时的渐近性态[J]. 沈阳师范学院学报:自然科学版,1998,(1):8-11.

[16] 张树义. 中值定理“中间点”当$x\to+\infty$时的渐近性态[J]. 河北师范学院学报:自然科学版,1997,(3):4-7.

[17] 刘冬红,张树义,郑晓迪. 二元函数柯西中值定理“中间点”的渐近估计式[J]. 井冈山大学学报:自然科学版, 2017, 38(4):13-17.

[18] Duca D I, Pop O. On the intermediate point in Cauchy's mean-value theorem[J]. Math. Inequal. Appl., 2006, 9: 375-389.

[19] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 泰勒公式“中间点函数”的一个注记[J]. 鲁东大学学报:自然科学版,2016,32(4): 302-306.

[20] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 广义 Taylor 中值定理“中间点函数”的性质[J]. 南通大学学报:自然科学版，2016, 15(3): 80-85.

[21] 李丹,张树义,郑晓迪. Cauchy 中值定理“中间点函数”的一个注记[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版, 2016, 15 (12): 5-11.

[22] 张树义,林媛,郑晓迪. 广义中值定理中间点函数的性质[J]. 北华大学学报:自然科学版, 2016, 17(6) 714-719.

[23] 张树义,丛培根,郑晓迪. 高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的性质[J].北华大学学报:自然科学版,2017, 18(1): 19-24.

[24] 李丹,张树义. 关于泰勒公式中间点函数的可微性[J]. 井冈山大学学报:自然科学版, 2016, 37(6)：11-14.

[25] 刘冬红,张树义,丛培根. 积分中值定理中间点函数的性质[J]. 北华大学学报:自然科学版,2017, 18(4): 434-438.

[26] 李丹,张树义,郑晓迪. 第二积分中值定理中间点函数的性质[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版, 2017, 16 (6): 5-8.