文章编号：1674-8085(2017)04-0013-05

二元函数柯西中值定理“中间点”的渐近估计式

刘冬红 [1]，*张树义 [1]，郑晓迪 [2]

（1.渤海大学数理学院，辽宁，锦州 121013；2. 锦州师范高等专科学校计算机系，辽宁，锦州 121000）

摘　要：研究了二元函数柯西中值定理“中间点”$(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta x)$，当点$B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$沿 AB 连线趋向于点$A(x_0,y_0)$时的渐近性态，利用比较函数概念，在一定条件下证明了二元函数柯西中值定理“中间点”$(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta x)$新的渐近性定理，获得了渐近估计式统一和发展了有关文献中的相应结果。

关键词：比较函数；二元函数柯西中值定理；中间点；洛必达法则

中图分类号：O172.1 **文献标识码**：A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.04.003

ASYMPTOTIC ESTIMATION FORMULA OF THE “INTERMEDIATE POINT ” IN THE CAUCHY MEAN VALUE THEOREM FOR TWO VARIABLE FUNCTIONS

LIU Dong-hong[1]; *ZHANG Shu-yi [1]; ZHENG Xiao-di [2]

(1. College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou, Liaoning 121013, China;

2. Department of computer, Jinzhou Teacher’s Training College, Jinzhou, Liaoning 121001, China)

Abstract: We study asymptotic behavior of the “intermediate point” $(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta x)$ in the Cauchy mean value theorem for two variable functions when point $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ approaches point $A(x_0,y_0)$ along line segment AB. Based on the concept for comparison function, the new asymptotic behavior theorems of the “intermediate point” $(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta x)$ in the Cauchy mean value theorem for two variable functions are proved under certain conditions, we obtain asymptotic estimation formula to unify and extend corresponding results of some reference.

Key words: comparison function; Cauchy mean value theorem for two variable functions; intermediate point; L'Hôpital's rule

众所周知，中值定理只给出了“中间点”$c\in(a,b)$的存在性，并没有指出“中间点”c在区间(a,b)内的数目、位置及求法。通过对中值定理“中间点”渐近性的研究，可以确定“中间点”c在区间(a,b)内的渐近位置，从而为近似计算提供一种有效和比较精确的计算方法。关于中值定理“中间点”渐近性态的研究，开始于Azpeitja[1]在1982年的文章。Azpeitja证明了在区间[a,x]上的一元函数$f(x)$的泰勒公式“中间点”ξ，当$x\to a^+$时满足$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\binom{n+p}{n}^{-1/p}$，其中$f^{(n+j)}(a)=0$ $(1\le j<p)$且$f^{(n+p)}(a)\ne 0$。在这之后，关于这方面问题的研究取得了一些新进展（可见文献[2-21]）。文献[2]将其推广为$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\left(\dfrac{n!\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$，

收稿日期：2017-01-03；修改日期：2017-05-25
作者简介：刘冬红(1991−)，女，辽宁葫芦岛人，硕士生，主要从事非线性泛函分析理论及应用的研究(E-mail:liudonghong6666@126.com);
*张树义(1960−)，男，辽宁锦州人，教授，硕士生导师，主要从事非线性泛函分析理论及应用的研究(E-mail:jzzhangshuyi@126.com);
郑晓迪(1983−)，女，辽宁锦州人，讲师，主要从事不动点理论及应用，非线性算子不动点的迭代逼近理论(E-mail:xiaodi_zheng@163.com).

其中$\alpha>0$。$\Gamma(\cdot)$为Gamma函数。文献[3]将其推广到了广义泰勒公式的情形，即广义泰勒公式的“中间点”ξ，当$x\to a^+$时，满足

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-\beta)}$$

其中$\alpha>-1,\beta>-1$。文献[4]使用比较函数得到一元函数泰勒公式 “中间点”新的渐近估计式。文献[5]使用比较函数讨论二元函数Taylor中值公式“中间点”的渐近性态，建立了Taylor中值公式中的中间点$(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$的参数$\theta$，满足如下更为广泛的渐近估计式$\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{\theta^{p-1}\varphi(\theta\rho)}{\varphi(\rho)}=\frac{n!C_{p-1}^{(\varphi)}}{C_{n+p-1}^{(\varphi)}}$，这一结果推广改进了文献[6-12]中的相应结果。文献[13-17]研究了几种中值定理“中间点”当$x\to+\infty$时的渐近性。文献[18-21]研究了几种中值定理中间点函数的可微性。受上述工作启发，本文利用比较函数，研究二元函数柯西中值定理“中间点”的渐近性态，建立了新的渐近估计式为：

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{\varphi(\theta\rho)\psi(\rho)}{\psi(\theta\rho)\varphi(\rho)}=\frac{C_{n-1}^{(\varphi)}C_n^{(\psi)}}{C_{n-1}^{(\psi)}C_n^{(\varphi)}},$$

显然本文结果与已往文献[9,12]相比较更具广泛性，因此本文结果推广和改进了有关文献[9,12]中的相应结果。

1 预备知识

二元函数柯西中值定理[12, 22] 设函数$f(x,y)$，$g(x,y)$在点$A(x_0,y_0)$的某个邻域E内存在连续的偏导数，对于E内任意一点$B(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$且$B\neq A$，在直线段$AB$上$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x,y)\neq 0$，则

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{g(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-g(x_0,y_0)}=\frac{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)} \tag{1}$$

其中$0<\theta<1$。

记$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\vec{e}$表示向量$\overrightarrow{AB}$的单位向量，设$\vec{e}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}=\left\{\frac{\Delta x}{\rho},\frac{\Delta y}{\rho}\right\}$，则有$\Delta x=\rho\cos\alpha,\ \ \Delta y=\rho\sin\alpha$。以“$\rho\underset{(e)}{\to}0$”表示点$B(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$沿$AB$连线趋向于点$A(x_0,y_0)$。

定义 1[4] 设$\psi(t)$定义在半开区间$(0,\ b]\ (b>0)$上，$\varphi(t)$在半开区间$(0,\ b]$上存在$m(m\geq 1)$阶导数且满足下列条件：

(i) $\lim\limits_{t\to 0^+}\left[t^m\cdot\varphi(t)\right]^{(i)}=0,\ i=0,1,2,\cdots,m-1$；

(ii) $\lim\limits_{t\to 0^+}t^i\cdot\varphi^{(i)}(t)/\varphi(t)=\lambda_{\varphi_i},\lambda_{\varphi_i}$为常数，$i=0,1,2,\cdots,m,\ \lambda_{\varphi_0}=1$；

(iii) $C_k^{(\varphi)}\overset{def}{=}\sum\limits_{i=0}^{k}(k-i)!\cdot\left(C_k^i\right)^2\lambda_{\varphi_i}\neq 0,k=1,2,\cdots,m$，

如果$\lim\limits_{t\to 0^+}\psi(t)/\varphi(t)$存在非零极限，则称$\varphi(t)$是当$t\to 0^+$时关于$\psi(t)$的比较函数。

例 1 在$(0,\ x](x>0)$上取$\varphi(t)=1/\sqrt{t}$，$\psi_1(t)=2+1/\sqrt{t}$，$\psi_2(t)=\left[\cos\left(\sqrt{t}+1\right)\right]/\sqrt{t}$，

则容易验证$\varphi(t)$是当$t\to 0^+$时关于$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$的比较函数。

引理 1[4] 设 $x>0,\varphi(t)=x^\alpha$，α为实数，$\alpha>-1$，$n\geq 1$，$\Gamma(\cdot)$为Gamma函数，则

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)\ !\left(C_n^i\right)^2\lambda_{\varphi_i}=\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(\alpha+1),$$

其中$\lambda_{\varphi_i}=\lim\limits_{t\to 0^+}t^i\cdot\varphi^{(i)}(t)/\varphi(t)=$

$$\begin{cases}1, & i=0\\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1), & i=1,2,\cdots,\ n\end{cases}$$

2 主要结果

对于二元函数柯西中值定理中的“中间点”$(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$的参数$\theta$，有如下结果。

定理 1 设函数$f(x,y)$，$g(x,y)$在点

$A\left(x_0,y_0\right)$的某个邻域E内存在连续的n阶偏导数，对于E内任意一点$B\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)$且$B\neq A$，在直线段$AB$上$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g\left(x,y\right)\neq 0$, 又设在半开区间$\left(0,\ \delta\right]$上存在$n$阶导数的函数$\varphi\left(\rho\right)$和$\psi\left(\rho\right)$分别是当$\rho\underset{(e)}{\rightarrow}0$时关于

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)$$和

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)$$

的比较函数，当$n>1$时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{(i)} f\left(x_0,y_0\right)=0\left(1\leq i\leq n-1\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{(i)} g\left(x_0,y_0\right)=0\left(1\leq i\leq n-1\right),$$

则二元函数柯西中值定理中的中间点$\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta x\right)$的参数$\theta$，有如下渐近估计式

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\varphi\left(\theta\rho\right)\psi\left(\rho\right)}{\psi\left(\theta\rho\right)\varphi\left(\rho\right)}=\frac{C_{n-1}^{(\varphi)}C_n^{(\psi)}}{C_{n-1}^{(\psi)}C_n^{(\varphi)}}, \tag{2}$$

其中$\varphi\left(\rho\right)\neq\psi\left(\rho\right)$。

证明 由定理1的条件可设

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)}{\varphi\left(\rho\right)}=b\neq0.$$

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)}{\psi\left(\rho\right)}=c\neq0.$$

为证式(2)，作下列辅助函数

$$h\left(\rho\right)=\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{g\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-g\left(x_0,y_0\right)}\cdot\frac{\psi\left(\rho\right)}{\varphi\left(\rho\right)}$$

其中$\Delta x=\rho\cos\alpha$，$\Delta y=\rho\sin\alpha$。注意到，当点$B\left(x_0+h,y_0+k\right)$沿$AB$连线，即沿方向$\vec{e}=\left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\}$趋于点$A\left(x_0,y_0\right)$时$\alpha$不变，由洛必达法则，有

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}h\left(\rho\right)=\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\rho^n\varphi\left(\rho\right)}\cdot$$

$$\frac{\rho^n\psi\left(\rho\right)}{g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)-g\left(x_0,y_0\right)}=\frac{C_n^{(\psi)}}{C_n^{(\varphi)}}\frac{b}{c} \tag{3}$$

注意到$0<\theta<1$，当$\rho\underset{(e)}{\rightarrow}0$时，有$\theta\rho\underset{(e)}{\rightarrow}0$，于是由(1)有

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}h\left(\rho\right)=$$

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y\right)}{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y\right)}\cdot\frac{\psi\left(\rho\right)}{\varphi\left(\rho\right)}=$$

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)f\left(x_0+\theta\rho\cos\alpha,y_0+\theta\rho\sin\alpha\right)}{\left(\theta\rho\right)^{n-1}\varphi\left(\theta\rho\right)}\cdot$$

$$\frac{\left(\theta\rho\right)^{n-1}\psi\left(\theta\rho\right)}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)g\left(x_0+\theta\rho\cos\alpha,y_0+\theta\rho\sin\alpha\right)}\cdot$$

$$\frac{\varphi\left(\theta\rho\right)\psi\left(\rho\right)}{\psi\left(\theta\rho\right)\varphi\left(\rho\right)}=\frac{C_{n-1}^{(\psi)}}{C_{n-1}^{(\varphi)}}\frac{b}{c}\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\varphi\left(\theta\rho\right)\psi\left(\rho\right)}{\psi\left(\theta\rho\right)\varphi\left(\rho\right)} \tag{4}$$

又由(3)知$\lim\limits_{\substack{\rho\to0\\(e)}}h\left(\rho\right)$存在，故由(4)知$\lim\limits_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\varphi\left(\theta\rho\right)\psi\left(\rho\right)}{\psi\left(\theta\rho\right)\varphi\left(\rho\right)}$存在，且

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}h\left(\rho\right)=\frac{C_{n-1}^{(\psi)}}{C_{n-1}^{(\varphi)}}\frac{b}{c}\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\varphi\left(\theta\rho\right)\psi\left(\rho\right)}{\psi\left(\theta\rho\right)\varphi\left(\rho\right)} \tag{5}$$

由(3)与(5)立得(2)式。证毕。

在定理1中取$\varphi\left(\rho\right)=\rho^s,\psi\left(\rho\right)=\rho^r$，并应用引理1立得下面结论。

推论1 设函数$f\left(x,y\right)$，$g\left(x,y\right)$在点$A\left(x_0,y_0\right)$的某个邻域E内有连续的n阶偏导数，$B(x_0+\Delta x,$ $y_0+\Delta y)$ $B\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)$为$E$内的任意一点且$B\neq A$，在直线段$AB$上

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g\left(x,y\right)\neq0,$$

又设

$$\lim_{\substack{\rho\to0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)}{\rho^s}=b,$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)}{\rho^r}=c,$$

当 $n>1$ 时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{(i)} f\left(x_0,y_0\right)=0\left(1\le i\le n-1\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{(i)} g\left(x_0,y_0\right)=0\left(1\le i\le n-1\right),$$

则二元函数柯西中值定理中的中间点（$x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta x)$ 的参数 θ，有如下渐近估计式

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\theta=\left(\frac{n+r}{n+s}\right)^{1/(s-r)}$$

其中 b,c 为非零常数， s,r 为实数 $s>-1,r>-1$ 且 $s\ne r$， $n\ge 1$。

在推论 1 中取 $n=1$，立得下面结论。

推论 2[12] 设函数 $f(x,y)$， $g(x,y)$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 的某个邻域 E 内有连续的 n 阶偏导数，$B(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为 E 内的任意一点且 $B\ne A$，在直线段 AB 上

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x,y)\ne 0,$$

又设

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)}{\rho^s}=b,$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)}{\rho^r}=c,$$

则二元函数柯西中值定理中的中间点 $\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta x\right)$ 的参数 θ，有如下渐近估计式

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\theta=\left(\frac{r+1}{s+1}\right)^{1/(s-r)},$$

其中 b,c 为非零常数，s,r 为非负实数 $s>-1,r>-1$ 且 $s\ne r$。

若 $\varphi(\rho)=\psi(\rho)$，则定理 1 不再成立，但有：

定理 2 在定理 1 的条件下，若 $\varphi(\rho)=\psi(\rho)$，再设在半开区间 $(0,\ \delta]$ 上存在 n 阶导数的函数 $\phi(\rho)$ 是当 $\rho\underset{(e)}{\to}0$ 时关于

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)-$$

$$(b/c)\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)$$

的比较函数，则二元函数柯西中值定理中的中间点 $\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta x\right)$ 的参数 θ，有如下渐近估计式

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{\phi(\theta\rho)\psi(\rho)}{\psi(\theta\rho)\phi(\rho)}=\frac{C_{n-1}^{(\phi)}C_n^{(\psi)}}{C_{n-1}^{(\psi)}C_n^{(\phi)}}\tag{2}$$

证 明 首 先 $\phi(\rho)\ne\psi(\rho)$ 。事 实 上 若 $\phi(\rho)=\psi(\rho)$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{1}{\psi(\rho)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)-$$

$$\frac{1}{\psi(\rho)}(b/c)\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)$$

$$=b-(b/c)c=0,$$

这与比较函数矛盾。因此 $\phi(\rho)\ne\psi(\rho)$。其次

$$h(\rho)=\left(\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{g\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-g\left(x_0,y_0\right)}-\frac{b}{c}\right)\cdot\frac{\psi(\rho)}{\phi(\rho)}$$

其中 $\Delta x=\rho\cos\alpha$, $\Delta y=\rho\sin\alpha$ 。余下证明仿照定理 1便可证得定理 2成立。

在推论1中，若 $r=s$，则推论1不再成立，但我们有**推论3** 在推论1的条件下，若 $r=s$，再设

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n f\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)-$$

$$\frac{1}{\rho^\lambda}(b/c)\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^n g\left(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha\right)=d,$$

则二元函数柯西中值定理中的中间点 $\left(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta x\right)$ 的参数 θ，有如下渐近估计式

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\theta=\left(\frac{n+r}{n+\lambda}\right)^{1/(\lambda-r)},$$

其中 d 为非零常数，λ 为正实数，$n\ge 1$。

证明 在定理 2 中取 $\phi(\rho)=\rho^\lambda,\psi(\rho)=\rho^r$，并应用引理 1 便可证得。

在推论 3 中取 $n=1$，立得下面结论。

推论 4[12] 在推论 2 的条件下，若 $r=s$，再设

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{1}{\rho^{\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-$$

$$\frac{1}{\rho^{\lambda}}(b/c)\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)g(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)=d$$

则二元函数柯西中值定理中的中间点 $(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta x)$ 的参数 θ，有如下渐近估计式：

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\theta=\left(\frac{r+1}{\lambda+1}\right)^{1/(\lambda-r)},$$

其中 d 为非零常数，λ 为实数 $\lambda>-1$，$n\geq 1$。

由方向导数定义知

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)-$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f(x_0,y_0)=$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f(x,y)\right]\Bigg|_{(x_0,y_0)}。$$

设 $f(x,y)$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 的某个邻域 E 内有连续 $n+1$ 阶偏导数，由方向导数计算公式有

$$\frac{\partial}{\partial e}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f(x,y)\right]\Bigg|_{(x_0,y_0)}=$$

$$\cos\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f_x(x_0,y_0)+$$

$$\sin\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f_y(x_0,y_0)。$$

由文[14]中的引理有

$$\cos\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f_x(x_0,y_0)+$$

$$\sin\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f_y(x_0,y_0)=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n+1}f(x_0,y_0)$$

于是在推论 3 中取 $r=s=0,\ \lambda=1$，便得下面结论。

推论 5 设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 的某个邻域 E 内在连续的 $n+1$ 阶偏导数，$B(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为 E 内的任意一点且 $B\neq A$，在直线段 AB 上 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x,y)\neq 0$，又设

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n+1}f(x_0,y_0)\cdot$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}g(x_0,y_0)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n}f(x_0,y_0)\cdot$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{n+1}g(x_0,y_0)\neq 0,$$

当 $n>1$ 时，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{(i)}f(x_0,y_0)=0(1\leq i\leq n-1),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)^{(i)}g(x_0,y_0)=0(1\leq i\leq n-1),$$

则二元函数柯西中值定理中的中间点 $(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta x)$ 的参数 θ，有如下渐近估计式

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(e)}}\theta=\frac{n}{n+1}$$

参考文献：

[1] Azpeitja A. G. On the Lagrange remainder of the Taylor formula[J]. Amer Math Monthly, 1982, 89(5): 311-312.

[2] 张树义. 关于中值定理“中间点”渐近性的若干注记[J]. 烟台师范学院学报:自然科学版, 1994,10(2): 105-110.

[3] 张树义. 中值定理“中间点”的几个新的渐近估计式[J]. 烟台师范学院学报:自然科学版,1995,11(2): 109-111

[4] 张树义. 广义 Taylor 公式“中间点”一个更广泛的渐近估计式[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(11): 173-176.

[5] 万美玲,张树义. 二元函数 Taylor 公式“中间点”的渐近估计式[J]. 鲁东大学学报:自然科学版,2016,32(2)：1-4.

[6] 张树义.关于中值定理“中间点”渐近性研究的新进展(I)[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版,2000, (6): 13-20.

[7] 张树义. 关于中值定理“中间点”渐近性的再研究[J]. 河北师范学院学报:自然科学版, 1994(4):22-23.

[8] 张树义. 关于二元函数 Taylor 定理的一个注记[J]. 渤海大学学报:自然科学版, 2004(2):121-123.

(参考文献[9]- [22]转第 37 页)

可能有无色的中间产物生成。

4）催化剂的XRD表征说明，600℃煅烧后的ZnO属于六方晶系纤锌矿结构，而且煅烧后的ZnO样品结晶度较好，有利于提高光催化性能。

参考文献：

[1] Daneshvar N, Salari D, Khataee A R. Photocatalytic degradation of azo dye acid red 14 in water on ZnO as an alternative catalyst to TiO_2[J]. Journal of photochemistry and photobiology A: chemistry, 2004, 162(2): 317-322.

[2] 黄新友,邓悦欢,李晓毅,等．三种改性方法对纳米 ZnO 催化剂粉体的光催化性能的影响[J]．人工晶体学报，2012,41(3):718-722．

[3] 陈沾,朱雷,汪恂．钇掺杂纳米氧化锌的光催化性能[J]．环境工程学报,2016,10(11):6290-6294．

[4] 陈丽东,刘锦欣,黄晔,等．ZnO-石墨烯复合材料光催化降解污染物研究进展[J].工业水处理,2015,35(9):17-20．

[5] 杨世迎,杨鑫,王萍,等.过硫酸盐高级氧化技术的活化方法研究进展[J]．现代化工,2009,29(4):13-19．

[6] 陈晓旸.基于硫酸自由基的高级氧化技术降解水中典型有机污染物研究[D]．大连:大连理工大学,2007．

[7] 沙俊鹏,唐海．纳米 TiO_2/介孔 ZSM-5 协同过硫酸盐光催化降解硝基苯酚废水[J].安徽工程大学学报, 2015, 30(1):32-35．

[8] 陈晴空．基于 SO_4^{-}·的非均相类 Fenton-光催化协同氧化体系研究[D]．重庆:重庆大学,2014．

[9] 姜秀榕,林梦冰,王怡承,等．α-Fe_2O_3 催化剂的制备及其对偶氮染料刚果红的紫外光催化降解性能研究[J]．井冈山大学学报:自然科学版,2016,37(2):33-37．

[10] 王展．Fe(III)/过硫酸盐体系降解有机污染物及其机理研究[D]．上海:上海大学,2015．

[11] 王瑶,武志刚,贾艳蓉．银掺杂多孔氧化钛光催化甲基橙降解反应条件的探究[J]．井冈山大学学报：自然科学版,2016,37(2):29-32,59．

[12] 方世杰,徐明霞,黄卫友,等．纳米 TiO_2 光催化降解甲基橙[J].硅酸盐学报,2001,29(5):439 -442．

[13] 夏阁遥.Fe_3O_4/ Ag_3PO_4 复合光催化剂处理孔雀石绿的性能研究[D].北京:中国地质大学,2015.

[14] 宋优男.改良型 ZnO 光催化剂的制备及其光催化降解抗生素废水的研究[D].西安:长安大学,2013.

(上接第 17 页)

[9] 郑茂玉. 二元函数微分中值定理“中间点”的渐近性[J]. 南方冶金学院学报, 1992, 13(4)：332-227.

[10] 孙弘安. 关于多元函数中值定理“中间点”的渐近性[J]. 南方冶金学院学报, 1989, 10(1):65-68.

[11] 刘泽庆. 关于中值定理“中间点”渐近性的一个注记[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版, 1992, 15(3): 259-261.

[12] 王一平, 张树义. 二元函数柯西中值定理的一个注记[J]. 长沙大学学报:自然科学版, 1999, 13(2):82-83.

[13] 张树义. 积分中值定理“中间点”当 $x \to +\infty$ 时的渐近性态[J]. 沈阳师范学院学报:自然科学版, 1998(1):8-11.

[14] 林媛, 张树义. 广义泰勒中值定理“中间点"当 $x \to +\infty$ 时更广泛的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版, 2016(3): 1-5.

[15] 张树义. 第二积分中值定理“中间点”当 $x \to +\infty$ 时的渐近性[J]. 宝鸡文理学院学报:自然科学版, 2000 (2):105-106.

[16] 张树义. 关于中值定理“中间点”当 $x \to +\infty$ 时的一个渐近估计式[J]. 南都学坛,1998，18(6): 22-25.

[17] 张树义,赵美娜,郑晓迪.积分中值定理中间点的渐近估计式[J]. 北华大学学报:自然科学版, 2016, 17(4): 448-454.

[18] 张树义,丛培根,郑晓迪. 高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的性质[J].北华大学学报:自然科学版, 2017,18(1): 10-24.

[19] 张树义,林媛,郑晓迪.广义中值定理中间点函数的性质[J].北华大学学报:自然科学版, 2016,17(6): 714-719.

[20] 李丹, 张树义. 关于泰勒公式中间点函数的可微性[J]. 井冈山大学学报:自然科学版, 2016, 37(6):11-14.

[21] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 广义 Taylor 中值定理“中间点函数”的性质[J]. 南通大学学报:自然科学版,2016, 15(3):80-85.

[22] 姜国晶,郝金彪. 关于高阶微分中值公式的几点注记[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版,1992,15(1):72-74.