文章编号：1674-8085(2017)03-0013-06

与 GM 凸函数有关的若干积分不等式

*时统业，李　鼎，李　军

（海军指挥学院信息系，江苏 南京，211800）

摘　要：利用 GM 凸函数与 GA 凸函数的关系，证明了 GM 凸函数存在单侧导数，并通过不等式建立了 GM 凸函数与其单侧导数的联系。给出 GA 凸函数的左(右)导数积分的计算公式。用普通数学分析的方法建立了若干 GM 凸函数的积分不等式。

关键词：GM 凸函数；GA 凸函数；积分不等式

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.03.003

INTEGRAL INEQUALITIES RELATED TO GM-CONVEX FUNCTIONS

*SHI Tong-ye, LI Ding, LI Jun

(Department of Information，PLA Naval Command College，Nanjing，211800, China)

Abstract: With the aid of the relationship between GM-convex functions and GA-convex functions，the existence of unilateral derivatives of GM-convex functions is proved，and the relation between GM-convex function and its unilateral derivative is established through inequalities. Calculating formulas of left or right derivative integration of GA-convex function are given. Integral inequalities for GM-convex functions are obtained by using mathematical analysis.

Key words: GM-convex function;GA-convex function;integral inequality

1　预备知识

凸函数在许多数学分支学科中都有重要的作用。近些年来，国内外许多专家学者提出了一些新的凸函数的概念。关于各种类型凸函数的性质及与凸函数有关的不等式已有许多研究成果。最近，作为对几何凸函数、GA-凸函数、GH-凸函数的推广，文献[1]提出了 GM-凸函数的概念。本文将研究与 GM-凸函数有关的积分不等式，仍然使用常见的方法，即：或者从凸函数的定义出发，或者利用不同类型凸函数之间的关系，或者借助凸函数与其单侧导数的关系。

定义 1[1]　设 $I\subseteq(0,+\infty)$，f：$I\to(0,+\infty)$，若对任意 x_1，$x_2\in I$ 和任意 $t\in[0，1]$，存在实数 r，使得

$$f\left(x_1^t x_2^{1-t}\right)\le(\ge)\begin{cases}\left[tf^r\left(x_1\right)+\left(1-t\right)f^r\left(x_2\right)\right]^{\frac{1}{r}}, & r\ne 0;\\ f^t\left(x_1\right)f^{1-t}\left(x_2\right), & r=0,\end{cases}$$

则称 $f(x)$是区间 I 上的 GM 凸(凹)函数，其中，当 $r>0$ 时，称 $f(x)$是 I 上的 GM_{r+}-凸(凹)函数，当 $r<0$ 时，称 $f(x)$是 I 上的 GM_{r-}-凸(凹)函数。

定义 2[2]　设 $f(x)$是定义在区间 $I\subseteq(0，\infty)$上的实值函数，如果对于任意 x_1，$x_2\in I$ 和 $t\in(0，1)$，有

$$f\left(x_1^t x_2^{1-t}\right)\le(\ge)\,tf\left(x_1\right)+\left(1-t\right)f\left(x_2\right),$$

则称 $f(x)$在区间 I 是 GA-凸(凹)函数。

引理 1[1]　设 $f(x)$是定义在区间 $I\subseteq(0，+\infty)$上的正值函数，则

收稿日期：2016-10-13；修改日期：2017-03-02

作者简介：*时统业(1963-)，男，河北张家口人，副教授，硕士，主要从事基础数学教学和研究(E-mail:shtycity@sina.com);
李　鼎(1983-)，男，江苏泰州人，讲师，硕士，主要从事通信与信息系统研究(E-mail:shushenld@163.com);
李　军(1979-)，男，江苏建湖人，工程师，硕士，主要从事计算机仿真研究(E-mail:nanjinglijun@tom.com).

i) $f(x)$是 I 上的 GM_{r+}-凸(凹)函数的充要条件是 $f^r(x)$是 I 上的 GA 凸(凹)函数；

ii) $f(x)$是 I 上的 GM_{r-}-凸(凹)函数的充要条件是 $f^r(x)$是 I 上的 GA 凹(凸)函数。

引理 2[3] 设 f: $I\subseteq(0,+\infty)\to R$，$J=\{\ln x|x\in I\}$，则 f 为 I 上的 GA 凸(凹)函数当且仅当 $g: x\in J\to f(e^x)$为 J 上的凸(凹)函数，f 在任意 $x\in I$ 处的单侧导数存在，且 $f'_+(x)\geq(\leq)f'_-(x)$。

引理 3 设 f: $[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to R$ 为 GA 凸(凹)函数，则 $xf'_+(x)$和 $xf'_-(x)$在(a,b)单调不减(不增)。

证明 当 f 为 GA 凸函数时，由文献[4]的引理 3 知结论成立。当 f 为 GA 凹函数时，$-f$ 为 GA 凸函数，易知结论成立。

引理 4[5] 设 $f(x)$为$[a,b]$上的凸(凹)函数，则对任意 $x\in[a,b]$，$y\in(a,b)$，有：

$$f(x)-f(y)\geq(\leq)(x-y)f'_\pm(y)。$$

引理 5 设 f: $[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$为 GM_{r+}-凸(凹)函数，则

(i) f 在(a,b)内任意点处的单侧导数存在；

(ii) 当 x，$y\in(a,b)$，$y<x$ 时，有：

$$yf^{r-1}(y)f'_-(y)\leq(\geq)yf^{r-1}(y)f'_+(y)\leq(\geq)$$
$$xf^{r-1}(x)f'_-(x)\leq(\geq)xf^{r-1}(x)f'_+(x); \quad (1)$$

(iii) 对任意 $x\in[a,b]$，$y\in(a,b)$，有：

$$f^r(x)-f^r(y)\geq(\leq)$$
$$ryf^{r-1}(y)f'_\pm(y)(\ln x-\ln y)。 \quad (2)$$

证明 令 $g(x)=f^r(x)$，$x\in[a,b]$，由引理 1 知 $g(x)$是$[a,b]$上的 GA 凸(凹)函数。

(i) 由引理 2 知 $g(x)$在(a,b)内的单侧导数 $g'_+(x)$和 $g'_-(x)$存在，而 $f(x)$是由 $u^{\frac{1}{r}}$ 与 $u=g(x)$复合而成，故 f 的单侧导数存在，并且：

$$f'_+(x)=\frac{1}{r}u^{\frac{1}{r}-1}g'_+(x)=\frac{1}{r}f^{1-r}(x)g'_+(x),$$

$$f'_-(x)=\frac{1}{r}u^{\frac{1}{r}-1}g'_-(x)=\frac{1}{r}f^{1-r}(x)g'_-(x),$$

由此得：

$$g'_+(x)=rf^{r-1}(x)f'_+(x),$$
$$g'_-(x)=rf^{r-1}(x)f'_-(x)。$$

(ii) 当 x，$y\in(a,b)$，$y<x$ 时，由引理 2 和引理 3 得：

$$yg'_-(y)\leq(\geq)yg'_+(y)\leq(\geq)$$
$$xg'_-(x)\leq(\geq)xg'_+(x),$$

由此证得式(1)成立。

(iii) 令 $h(x)=f^r(e^x)$，$x\in[\ln a,\ln b]$，因为 f 是 GM_{r+}-凸(凹)函数，所以由引理 1 和引理 2 知 $h(x)$是 $[\ln a,\ln b]$ 上的凸(凹)函数。$h'_+(x)=re^xf^{r-1}(e^x)f'_\pm(e^x)$。对任意 $x\in[a,b]$，$y\in(a,b)$，令 $s=\ln x$，$t=\ln y$，则有 $s\in[\ln a,\ln b]$，$t\in(\ln a,\ln b)$，对函数 $h(x)$使用引理 4 有：

$$h(s)-h(t)\geq(\leq)(s-t)h'_\pm(t),$$

即式(2)成立。

注 1 若 f 为 GM_{r-}-凸(凹)函数时，引理 4(ii)中的不等式不变，而引理 5(iii)中的不等式反向。

引理 6[6] 设 f 是$[a,b]$上的连续凸函数，g 在$[a,b]$上有连续的导函数且至多只有有限个零点，则：

$$\int_a^b g(x)f'_-(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)f'_+(x)\mathrm{d}x=$$
$$\left(g(x)f(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x。$$

引理 7 设 f 是$[a,b]\subseteq(0,\infty)$上的连续的 GA 凸(凹)函数，g 在$[a,b]$上有连续的导函数且至多只有有限个零点，则有：

$$\int_a^b g(x)f'_-(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)f'_+(x)\mathrm{d}x=$$
$$\left(g(x)f(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x。 \quad (3)$$

证明 设 $h(x)=f(e^x)$，由引理 2 知 $h(x)$是$[\ln a,\ln b]$上的连续凸(凹)函数。因 g 在$[a,b]$上有连续的导函数且至多只有有限个零点，所以 $g(e^x)$在$[\ln a,\ln b]$上有连续的导函数且至多只有有限个零点。对 $h(x)$和 $g(e^x)$在$[\ln a,\ln b]$上使用引理 6，得：

$$\int_{\ln a}^{\ln b}g(e^x)h'_-(x)\mathrm{d}x=\int_{\ln a}^{\ln b}g(e^x)h'_+(x)\mathrm{d}x=$$
$$\left(g(e^x)h(x)\right)\Big|_{\ln a}^{\ln b}-\int_{\ln a}^{\ln b}h(x)\left(g(e^x)\right)'\mathrm{d}x,$$

其中

$$\int_{\ln a}^{\ln b}g(e^x)h'_-(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\ln a}^{\ln b}g(e^x)e^xf'_-(e^x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)f'_-(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\ln a}^{\ln b} g\left(e^x\right)h'_+\left(x\right)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\ln a}^{\ln b} g\left(e^x\right)e^x f'_+\left(e^x\right)\mathrm{d}x = \int_a^b g\left(x\right)f'_+\left(x\right)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\ln a}^{\ln b} h\left(x\right)\left(g\left(e^x\right)\right)'\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\ln a}^{\ln b} f\left(e^x\right)e^x g'\left(e^x\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(x\right)g'\left(x\right)\mathrm{d}x,$$

$$\left(g\left(e^x\right)h\left(x\right)\right)\Big|_{\ln a}^{\ln b} = g\left(x\right)f\left(x\right)\Big|_a^b,$$

故式(3)得证。

为方便起见，将相异正数 a，b 的几何平均、指数平均和对数平均分别记为

$$G(a,b)=\sqrt{ab}\,,\quad I(a,b)=e^{-1}\left(b^b/a^a\right)^{\frac{1}{b-a}},$$

$$L(a,b)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}\text{。}$$

2 主要结果

定理 1 设 f：[a，b]⊆(0，+∞)→R 为非常值单调且连续的 GA 凸(凹)函数，则有

$$\frac{\int_a^b x^2\left[f'_-\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x}{bf\left(b\right)-af\left(a\right)-\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x}\geq(\leq)\frac{\int_a^b x\left[f'_-\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x}{f\left(b\right)-f\left(a\right)} \tag{4}$$

证明 因为 f 是[a,b]上的单调 GA 凸(凹)函数，故有 $f'_-(x)f'_-(y)\geq 0$，又由引理 3 知 $xf'_-(x)$ 单调增加，于是有：

$$\int_a^b\int_a^b f'_-(x)f'_-(y)\left[yf'_-(y)-xf'_-(x)\right]\times(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq(\leq)0,$$

由此得：

$$\int_a^b f'_-\left(x\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^2\left[f'_-\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x\geq(\leq)\int_a^b xf'_-\left(x\right)\mathrm{d}x\int_a^b x\left[f'_-\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

在引理 7 中分别取 $g\left(x\right)=1/x$ 和 $g\left(x\right)=1$ 得：

$$\int_a^b f'_-\left(x\right)\mathrm{d}x = f\left(b\right)-f\left(a\right) \tag{6}$$

$$\int_a^b xf'_-\left(x\right)\mathrm{d}x = bf\left(b\right)-af\left(a\right)-\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{7}$$

由式(5)、(6)、(7)得到式(4)。

推论 1.1 设 f：[a，b]⊆(0，+∞)→(0，+∞)是非常值单调且连续的 GM_{r+}-凸(凹)函数，则有：

$$\frac{\int_a^b x^2 f^{2r-2}\left(x\right)\left[f'_-\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x}{bf^r\left(b\right)-af^r\left(a\right)-\int_a^b f^r\left(x\right)\mathrm{d}x}\geq(\leq)\frac{\int_a^b xf^{2r-2}\left[f'_-\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x}{f^r\left(b\right)-f^r\left(a\right)}$$

证明 由引理 1，$f^r\left(x\right)$是[a，b]上的非常值单调 GA 凸(凹)函数，对 $f^r\left(x\right)$应用定理 1 结论则推论立证。

注 2 若 f 为 GM_{r-}-凸(凹)函数时，推论 1.1 中的不等式反向。

定理 2 设 f：[a，b]⊆(0，+∞)→(0，+∞)是 GM_{r+}-凸(凹)函数，$p\left(x\right)$是[a，b]上正的可积函数，则有：

$$\int_a^b p\left(x\right)f^r\left(x\right)\mathrm{d}x\geq(\leq)f^r\left(y_0\right)\int_a^b p\left(x\right)\mathrm{d}x+ry_0 f^{r-1}\left(y_0\right)\left[f'_+\left(y_0\right)-f'_-\left(y_0\right)\right]\times\int_a^{y_0}\left(\ln y_0-\ln x\right)p\left(x\right)\mathrm{d}x\geq(\leq)f^r\left(y_0\right)\int_a^b p\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{8}$$

其中

$$y_0=\exp\left[\frac{\int_a^b p\left(x\right)\ln x\mathrm{d}x}{\int_a^b p\left(x\right)\mathrm{d}x}\right]$$

证明 由引理 5(iii)，对任意 x∈[a，b]，y∈(a，b)，有：

$$f^r\left(y\right)-f^r\left(x\right)\leq(\geq)ryf^{r-1}\left(y\right)f'_-\left(y\right)\left(\ln y-\ln x\right), \tag{9}$$

$$f^r\left(y\right)-f^r\left(x\right)\leq(\geq)ryf^{r-1}\left(y\right)f'_+\left(y\right)\left(\ln y-\ln x\right) \tag{10}$$

将式(9)、(10)乘以 $p\left(x\right)$然后分别在[a，y]和[y，b]上对 x 积分并相加得：

$$f^r\left(y\right)\int_a^b p\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_a^b p\left(x\right)f^r\left(x\right)\mathrm{d}x\leq(\geq)ryf^{r-1}\left(y\right)f'_-\left(y\right)\int_a^y\left(\ln y-\ln x\right)p\left(x\right)\mathrm{d}x+ryf^{r-1}\left(y\right)f'_+\left(y\right)\int_y^b\left(\ln y-\ln x\right)p\left(x\right)\mathrm{d}x \tag{11}$$

在式(11)中取 $y=y_0$，则 $y_0\in(a,b)$，且：

$$\int_{y_0}^{b}(\ln y-\ln x)p(x)\mathrm{d}x=$$

$$-\int_{a}^{y_0}(\ln y-\ln x)p(x)\mathrm{d}x,$$

由式(11)得式(8)的左边不等式。又因 $f'_+(y_0)\geq(\leq)f'_-(y_0)$，故式(8)的右边不等式得证。

推论 2.1 设 f: [a，b]⊆(0，+∞)→(0，+∞)是 GM_{r+}-凸(凹)函数，则有：

$$\int_a^b\frac{f^r(x)}{x}\mathrm{d}x\geq(\leq)(\ln b-\ln a)f^r\left(\sqrt{ab}\right)+$$

$$\frac{r}{8}\sqrt{ab}(\ln b-\ln a)^2f^{r-1}\left(\sqrt{ab}\right)\times$$

$$\left[f'_+\left(\sqrt{ab}\right)-f'_-\left(\sqrt{ab}\right)\right]\geq(\leq)$$

$$(\ln b-\ln a)f^r\left(\sqrt{ab}\right)$$

当 $p\neq-1$ 时，有：

$$\int_a^b x^pf^r(x)\mathrm{d}x\geq(\leq)\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}f^r(y_0)+$$

$$\frac{r}{(p+1)^2}y_0^{-p}f^{r-1}(y_0)\left[f'_+(y_0)-f'_-(y_0)\right]\times$$

$$\left[I\left(a^{p+1},b^{p+1}\right)-G\left(a^{p+1},b^{p+1}\right)\right],$$

其中 $y_0=\left[I\left(a^{p+1},b^{p+1}\right)\right]^{\frac{1}{p+1}}$。

注 3 若 f 为 GM_{r-}-凸(凹)函数时，定理 2 和推论 2.1 中的不等式反向。

为方便起见，记条件 A 为如下条件：

$$1+\frac{ryf'_-(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)>0,$$

$$1+\frac{ryf'_+(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)>0。$$

定理 3 设 f: [a，b]⊆(0，+∞)→(0，+∞)是 GM-凸(凹)函数，$r\neq0,-1$，y∈(a，b)，$f'_+(y)\neq0$，$f'_-(y)\neq0$，f 满足条件 A，则有：

$$\int_a^b\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\geq(\leq)\ \frac{f^2(y)}{(r+1)yf'_-(y)}\times$$

$$\left\{1-\left[1+\frac{ryf'_-(y)}{f(y)}(\ln a-\ln y)\right]^{\frac{r+1}{r}}\right\}+$$

$$\frac{f^2(y)}{(r+1)yf'_+(y)}\times$$

$$\left\{\left[1+\frac{ryf'_+(y)}{f(y)}(\ln b-\ln y)\right]^{\frac{r+1}{r}}-1\right\}\tag{12}$$

证明 由引理 5，对任意 x∈[a，b]有：

$$f(x)\geq(\leq)$$

$$f(y)\left[1+\frac{ryf'_-(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}\tag{13}$$

$$f(x)\geq(\leq)$$

$$f(y)\left[1+\frac{ryf'_+(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}\tag{14}$$

将式(13)和式(14)乘以 $1/x$，然后分别在[a，y]和[y，b]上对 x 积分并相加即得式(12)。

注 4 当 f 是 GM_{r+}-凹函数或 GM_{r-}-凸函数，显然满足条件 A。

推论 3.1 设 f: [a，b]⊆(0，+∞)→(0，+∞)是 GM-凸(凹)函数，$r\neq0,-1$，f 在 y∈(a，b)处可导且 $f'(y)\neq0$，又对任意 x∈[a，b]有：

$$1+\frac{ryf'(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)>0,$$

则有

$$\int_a^b\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\geq(\leq)\ \frac{f^2(y)}{(r+1)yf'(y)}\times$$

$$\left\{\left[1+\frac{ryf'(y)}{f(y)}(\ln b-\ln y)\right]^{\frac{r+1}{r}}-\right.$$

$$\left.\left[1+\frac{ryf'(y)}{f(y)}(\ln a-\ln y)\right]^{\frac{r+1}{r}}\right\}\tag{15}$$

注 5 当 f 是 GM_{r+}-凹函数或 GM_{r-}-凸函数，显然有 $1+\frac{ryf'(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)>0$。

受文献[7]启发，由推论 3.1 得到推论 3.2。

推论 3.2 设 f: [a，b]⊆(0，+∞)→(0，+∞)是 GM-凸(凹)函数，$r\neq0,-1$，f 在 $G=G(a,b)$ 处可导，且 $f'(G)\neq0$，又对任意 x∈[a，b]有：

$$1+\frac{rGf'(G)}{f(G)}(\ln x-\ln G)>0, \tag{16}$$

则有：

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \geq (\leq)$$

$$(\ln b-\ln a)\frac{r}{2(r+1)}f(G)h(s) \geq (\leq)$$

$$g(r)(\ln b-\ln a)f(G) \tag{17}$$

其中

$$s=(\ln b-\ln a)\frac{rGf'(G)}{2f(G)}\in(-1,0)\cup(0,1),$$

$$h(s)=\frac{(1+s)^{\frac{r+1}{r}}-(1-s)^{\frac{r+1}{r}}}{s},$$

当 f 是 GM-凸函数时，

$$g(r)=\begin{cases}1, & r\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1];\\ 2^{\frac{1-r}{r}}, & r>1\end{cases}$$

当 f 是 GM-凹函数时，

$$g(r)=\begin{cases}2^{\frac{1-r}{r}}, & r\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1];\\ 1, & r>1\end{cases}$$

证明 当 f 是 GM 凸函数时，在式(16)中分别取 $x=a$ 和 $x=b$，得 $s\in(-1,1)$。在式(15)中取 $y=G$，得式(17)的左边不等式。显然 $h(s)$是(-1，1)上的偶函数，故只需考虑它在(0，1)上的性态。对函数 $(1+x)^{\frac{r+1}{r}}-(1-x)^{\frac{r+1}{r}}$ 在[0，s]上使用 lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(0, s)$，使得：

$$\frac{r}{r+1}h(s)=(1+\xi)^{\frac{1}{r}}+(1-\xi)^{\frac{1}{r}},$$

当 $r\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1]$ 时，对任意 $x\in(0,1)$ 有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+x)^{\frac{1}{r}}+(1-x)^{\frac{1}{r}}\right]=$$

$$\frac{1}{r}\left[(1+x)^{\frac{1}{r}-1}-(1-x)^{\frac{1}{r}-1}\right]\geq 0,$$

即 $(1+x)^{\frac{1}{r}}+(1-x)^{\frac{1}{r}}$ 在[0,1]上单调增加，于是对任意 $x\in(0,1)$ 有 $(1+x)^{\frac{1}{r}}+(1-x)^{\frac{1}{r}}\geq 2$，从而 $\frac{r}{r+1}h(s)\geq 2$。

类似可证当 $r>1$ 时有 $\frac{r}{r+1}h(s)\geq 2^{\frac{1}{r}}$，因此式(17)的右边不等式得证。当 f 是 GM 凹函数时，同理可证式(17)成立。

注 6 当 f 是 GM_{r+}-凹函数或 GM_{r-}-凸函数时，必满足 $1+\frac{rGf'(G)}{f(G)}(\ln x-\ln G)>0$。

定理 4 设 f: $[a，b]\subseteq(0，+\infty)\to(0，+\infty)$是 GM-凸函数，$r\leq 1$ 且 $r\neq 0$， f 满足条件 A，$y\in(a，b)$，则有：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq$$

$$f(y)\left[1+\frac{ryf'_{\pm}(y)}{f(y)}(\ln I-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq f(y)\left\{1+\frac{ry}{(b-a)f(y)}\times\right.$$

$$[(y-a)f'_{-}(y)(\ln I(y,a)-\ln y)+$$

$$\left.(b-y)f'_{+}(y)(\ln I(b,y)-\ln y)]\right\}^{\frac{1}{r}}。 \tag{19}$$

证明 由引理 5，对任意 $x\in[a，b]$有：

$$f(x)\geq f(y)\left[1+\frac{ryf'_{\pm}(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}},$$

利用上式及 Jensen 不等式得：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\frac{f(y)}{b-a}\times$$

$$\int_a^b\left[1+\frac{ryf'_{\pm}(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}x\geq f(y)\times$$

$$\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[1+\frac{ryf'_{\pm}(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{r}}=$$

$$f(y)\left[1+\frac{ryf'_{\pm}(y)}{f(y)}(\ln I-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}$$

故式(18)得证。

由引理 5，对任意 $x\in[a，b]$有

$$f(x)\geq f(y)\left[1+\frac{ryf'_{-}(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{20}$$

$$f(x)\geq f(y)\left[1+\frac{ryf'_{+}(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{21}$$

在式(20)中对 x 在[a，y]上积分，在式(21)中对

x 在[y，b]上积分，然后相加并利用 Jensen 不等式得：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge f(y)\frac{y-a}{b-a}\times$$

$$\left[1+\frac{ryf'_-(y)}{f(y)}(\ln I(y,a)-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}+f(y)\times$$

$$\frac{b-y}{b-a}\left[1+\frac{ryf'_+(y)}{f(y)}(\ln I(b,y)-\ln y)\right]^{\frac{1}{r}}\ge$$

$$f(y)\left\{\frac{y-a}{b-a}\left[1+\frac{ryf'_-(y)}{f(y)}(\ln I(y,a)-\ln y)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{b-y}{b-a}\left[1+\frac{ryf'_+(y)}{f(y)}(\ln I(b,y)-\ln y)\right]\right\}^{\frac{1}{r}}=$$

$$f(y)\left\{1+\frac{ry}{(b-a)f(y)}\times\right.$$

$$[(y-a)f'_-(y)(\ln I(y,a)-\ln y)+$$

$$\left.(b-y)f'_+(y)(\ln I(b,y)-\ln y)]\right\}^{\frac{1}{r}}。$$

故式(19)得证。

推论 4.1 设 f：[a，b]$\subseteq$(0，+∞)→(0，+∞)是 GM-凸函数，$r\le 1$ 且 $r\ne 0$，则有：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge f(I)\left\{1+\frac{rI}{(b-a)f(I)}\times\right.$$

$$\left.\left(I-\frac{ab}{L}\right)[f'_+(I)-f'_-(I)]\right\}^{\frac{1}{r}}\ge f(I),$$

其中 $I=I(a,b)$，$L=L(a,b)$。

注 7 当 f 是 GM_{r+}-凹函数且 $r\ge 1$ 时，定理 4 和推论 4.1 中的不等式反向。

参考文献：

[1] 宋振云,陈少元． GM-凸函数及其 Jensen 型不等式[J]．数学的实践与认识,2014,44(20):280-287．

[2] 吴善和．GA-凸函数与琴生不等式[J]．贵州师范大学学报:自然科学版,2004,22(2):52-55．

[3] 张小明,褚玉明．解析不等式新论[M]．哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009:198．

[4] 时统业,吴涵．GA 凸函数的若干不等式[J]．湖南理工学院学报:自然科学版,2012,25(2):7-10．

[5] 时统业,李照顺,夏琦. 与 MH 凸函数有关的积分不等式和单调函数[J]. 广东第二师范学院学报,2016,36(3):23-29．

[6] 王良成．凸函数的两个积分性质[J]．达县师范高等专科学校学报:自然科学版,2004,14(2):12-13．

[7] 何晓红． 指数凸函数的积分不等式及其在 Gamma 函数中的应用[J]．纯粹数学与应用数学,2014,30(1):69-76．