文章编号：1674-8085(2017)01-0025-04

无限维两体量子系统态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒

*王银珠，黄　丽，马瑞芬

（太原科技大学数学系，山西，太原 030024）

摘　要：研究了量子信息理论中无限维两体量子态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒问题。利用无限维两体量子系统态的Concurrence 纠缠度以及可分态的边缘态的概念，讨论了无限维两体量子态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒的定义。得到了可分性鲁棒以及纠缠鲁棒的若干基本性质，推广了有限维两体量子态的相应结果，获得了无限维两体量子系统态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒分别为零的等价条件。

关键词：无限维量子系统；可分性鲁棒；纠缠鲁棒；边缘可分态

中图分类号：O413　**文献标识码**：A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.01.005

THE SEPARABILITY ROBUSTNESS AND ENTANGLEMENT ROBUSTNESS FOR STATES IN INFINITE DIMENSIONAL BIPARTITE SYSTEMS

* WANG Yin-zhu, HUANG Li, MA Rui-fen

(Department of mathematics, Taiyuan University of science and technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China)

Abstract: The separability robustness and entanglement robustness for states in infinite dimensional quantum systems in quantum information theory were studied. Using Concurrence entanglement measure and edge states of separable states in infinite dimensional quantum systems, the concepts of separability robustness and entanglement robustness for states in infinite dimensional quantum systems was discussed. Some properties of separability robustness and entanglement robustness for infinite dimensional quantum states were obtained. Furthermore, these results generalize the corresponding results of bipartite finite dimensional quantum systems. We obtain some equivalents conditions of zero separability robustness and entanglement robustness.

Key words: infinite dimensional quantum systems; separability robustness; entanglement robustness; edge separable states

0　引言

众所周知，量子纠缠态作为一种重要的物理资源已被广泛地应用于量子计算的各个方面[1]。如何识别态的纠缠性以及量化纠缠程度是量子信息理论中的两个基本的问题。在两体复合量子系统中对于纠缠态的判别问题已有众多有价值的结果[2-7]，但是仍无法有效地鉴别所有的量子态。在量化纠缠度方面，国内外也有很多有意义的研究结果，比如 Concurrence 纠缠度、形成纠缠度以及负性纠缠度等[8-10]。近十几年来，在复合量子系统中研究者发现纠缠不仅仅是隐藏于态之间的一种量子关联，常见的量子关联还有量子无序性（Quantum

收稿日期：2016-07-20；修改日期：2016-11-08
基金项目：山西省自然科学基金项目（2015011003）；太原科技大学博士科研启动基金项目(20142032)
作者简介：*王银珠(1977-)，男，山西朔州人，副教授，博士，主要从事量子信息与量子计算的研究(Email:2006wang.yinzhu@163.com);
黄　丽(1979-)，女，山西太原人，副教授，博士，主要从事泛函分析与量子计算的研究(Email:huangli19790315@163.com);
马瑞芬(1980-)，女，山西平遥人，讲师，硕士，主要从事泛函分析与量子计算的研究(Email:27720794@qq.com).

Discord)、测度诱导的非局部性（Measurement Induced Non-locality)、量子亏损（Quantum Deficit) 以及可分性鲁棒（Separability Robustness）和纠缠鲁棒(Entanglement Robustness)等[11-14]。所有这些量子关联都可作为重要的资源应用于量子计算的各个方面[15]。本文主要讨论无限维两体量子态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒问题。

记 $S(H)$ 表示与量子系统相对应的可分复 Hilbert 空间 H 上的全体量子态组成的集合。设 $\rho\in S(H)$，如果 $Tr(\rho^2)=1$，则 ρ 为纯态；$Tr(\rho^2)<1$，则 ρ 为混合态，这里 $Tr(\cdot)$ 表示矩阵的迹运算。一般的，纯态用 Hilbert 空间中的复单位向量表示，记为 $|\psi\rangle$，$\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ 是其对应的密度算子。而混合态一般可表示为纯态的凸组合的形式，即 $\rho=\sum_i p_i\rho_i$，这里 $p_i\ge 0$，$\sum_i p_i=1$，ρ_i 是 H 上的纯态。设 $H=H_1\otimes H_2$，$\dim H\le+\infty$，$|\psi\rangle\in H$ 称为可分的，如果 $|\psi\rangle=|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle$，这里 $|\psi_i\rangle\in H_i$ 分别是 H_i 上的纯态（i=1,2）。对于混合态 $\rho\in S(H)$，称 ρ 是可分的，如果它是可分纯态的凸组合的形式，即 $\rho=\sum_i p_i\rho_i$，$\rho_i=|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 是可分纯态，或者 ρ 是上述形式态的迹范数拓扑的极限。

首先给出一些符号。设 H_1,H_2 分别是与量子系统1,2相结合的可分复 Hilbert 空间，$H=H_1\otimes H_2$. 记 $S_S(H)$ 表示 $H=H_1\otimes H_2$ 中的全体可分态组成的集合，$S_{S-P}(H)$ 表示 H 中的全体可分纯态组成的集合，$\bar{S}_s(H)$ 表示 $H=H_1\otimes H_2$ 中的全体纠缠态组成的集合，显然有 $S_{S-P}(H)\subseteq S_S(H)\subseteq S(H)$，且 $S(H)=S_S(H)\bigcup\bar{S}_s(H)$。

2010 年，Zhang[16]提出了有限维两体复合量子系统可分态的负性纠缠（Negativity entanglement），设 $\rho\in S_S(H)$，ρ 的负性纠缠记为 $N(\rho)$，定义为

$$N(\rho)=-\inf_{\{t,\sigma\}}\{tC(\sigma):C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})>0\} \tag{1}$$

其中 $C(\sigma)$ 表示量子态 σ 的 Concurrence 纠缠度，类似地 $C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})$ 表示 $\frac{\rho+t\sigma}{1+t}$ 的 Concurrence 纠缠度。根据文献[8]，如果 σ 为纯态，则

$$C(\sigma)=\sqrt{2[1-Tr(\sigma_1^2)]} \tag{2}$$

$\sigma_1=Tr_2(\sigma)$ 表示 σ 对于第二个子系统求偏迹，如果 $\sigma=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 为混合态，则

$$C(\sigma)=\inf_{\{p_i,|\psi_i\rangle\}}\sum_i p_iC(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \tag{3}$$

ρ 的可分性鲁棒定义为

$$R_s(\rho)=|N(\rho)|=\inf_{\{t,\sigma\}}\{tC(\sigma):C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})>0\} \tag{4}$$

其物理意义可描述为可分态 ρ 抹杀其可分性至少应该混合的纠缠的量，从而使之成为纠缠态。

在 1998 年，Vidal G[14]提出了有限维两体量子态的纠缠鲁棒的定义，设 $\rho\in S(H)$，且 ρ 的纠缠鲁棒记为 $R_e(\rho)$，其定义为

$$R_e(\rho)=\inf_{\{\sigma\in S_S(H)\}}\{t:C[\frac{1}{1+t}(\rho+t\sigma)]=0\} \tag{5}$$

其中 $C[\frac{1}{1+t}(\rho+t\sigma)]$ 表示 $\frac{1}{1+t}(\rho+t\sigma)$ 的 Concurrence 纠缠度。接下来给出无限维两体量子态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒的定义及性质。

1 主要结果

定义 1 设 $H=H_1\otimes H_2$，且 $\dim(H)=+\infty$，$\rho\in S_S(H)$，ρ 的可分性鲁棒定义为

$$R_s(\rho)=\inf_{\{t,\sigma\}}\{tC(\sigma):C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})>0\}. \tag{6}$$

其中 $C(\sigma)$ 表示无限维量子态 σ 的 Concurrence 纠缠度[8]，类似地 $C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})$ 表示 $\frac{\rho+t\sigma}{1+t}$ 的 Concurrence 纠缠度。

定义 2 设 $H=H_1\otimes H_2$，且 $\dim(H)=+\infty$，$\rho\in S(H)$，ρ 的纠缠鲁棒定义为

$$R_e(\rho)=\inf_{\{\sigma\in S_s(H)\}}\{t:C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})=0\}. \tag{7}$$

其中 $C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})$ 表示 $\frac{\rho+t\sigma}{1+t}$ 的 Concurrence 纠缠度。

定义 3 设 $H=H_1\otimes H_2$，且 $\dim(H)=+\infty$，$\rho\in S_S(H)$，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个纠缠

态 $\sigma\in\bar{S}_s(H)$，使得 $\frac{\rho+\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon}$ 是纠缠的，即 $C(\frac{\rho+\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon})>0$，则称可分态 ρ 是一个可分边缘态。记为 $\rho\in S_{ES}(H)$，其中 $S_{ES}(H)$ 表示 H 上的可分边缘态全体。

下面给出无限维量子系统可分性鲁棒和纠缠鲁棒的性质。

性质 1 设 $H=H_1\otimes H_2$，且 $\dim(H)=+\infty$，$\rho\in S_{ES}(H)$ 当且仅当 $R_s(\rho)=0$。

证明 如果 $\rho\in S_{ES}(H)$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个纠缠态 $\sigma\in\bar{S}_s(H)$，使得 $\frac{\rho+\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon}$ 是纠缠的，即 $C(\frac{\rho+\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon})>0$，注意到 $C(\sigma)>0$，从而

$$R_s(\rho)=\inf_{\{t,\sigma\}}\{tC(\sigma):C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})>0\}=0.$$

反过来，如果 $R_s(\rho)=0$，取纠缠态 $\sigma\in\bar{S}_s(H)$，注意到 $C(\sigma)>0$，则对任意的 $t>0$，有 $C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})>0$，则 $\rho\in S_{ES}(H)$。

性质 2 设 $H=H_1\otimes H_2$，且 $\dim(H)=+\infty$，$\rho\in S_{S-P}(H)$，则 $R_s(\rho)=0$。

证明 设 $\rho=|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\otimes|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$，其中 $|\varphi_1\rangle\in H_1,|\varphi_2\rangle\in H_2$。

选取合适的基，令 $|\varphi_1\rangle=|0_1\rangle,|\varphi_2\rangle=|0_2\rangle$，则 $\rho=|0_1\rangle\langle 0_1|\otimes|0_2\rangle\langle 0_2|$，在此基下，选取 $\sigma=|\psi^+\rangle\langle\psi^+|$，其中 $|\psi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$。

利用部分转置判据[]，可得对于任意的 $t>0$，$\frac{\rho+t\sigma}{1+t}$ 是纠缠的，即

$$C(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})>0$$

因此 $tC(\sigma)$ 的下确界是 0，故 $R_s(\rho)=0$。

性质 2 说明可分纯态通过混合任意小的纠缠的量，即可变成纠缠态，从而 $S_{S-P}(H)\subseteq S_{ES}(H)$，但是如果 $R_s(\rho)=0$，ρ 不一定是可分纯态。

例如：设 $\dim H_1=\dim H_2=+\infty$，

$$\rho=\frac{1}{2}(|\varphi\rangle\langle\varphi|+|\psi\rangle\langle\psi|)\in S(H),$$

$\varphi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|11\rangle)$，$\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|00\rangle)$，$\sigma=|\psi^+\rangle\langle\psi^+|$，$|\psi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$，易见

$$\frac{\rho+t\sigma}{1+t}=\frac{1}{4(1+t)}\begin{pmatrix}1+2t & 1 & 0 & 2t & \cdots\\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots\\ 2t & 0 & 1 & 1+2t & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

注意到 $(\frac{\rho+t\sigma}{1+t})^{T_A}$ 不恒大于零，而 $R_s(\rho)=0$，但 ρ 不是可分纯态。

通过以上分析，发现

$\rho\in S_{S-P}(H)\Rightarrow\rho\in S_{ES}(H)$,

$\rho\in S_{ES}(H)\Leftrightarrow R_S(\rho)=0$。

由于局部酉变换不改变约化密度算子的特征值，从而不改变其 Concurrence 纠缠度，故显然不改变可分性鲁棒定义中的约束条件，故有

性质 3 设 U_1,U_2 分别是 H_1,H_2 系统上的酉算子，$\rho\in S_S(H)$，则 $R_s(U\rho U^{\dagger})=R_S(\rho)$，其中 $U=U_1\otimes U_2,U^{\dagger}$ 表示 U 的共轭转置运算。

性质 4 设 $\rho=\sum_s p_s\rho_s\in S_s(H)$，则 $R_s(\rho)\geq\sum_s p_sR_S(\rho_s)$。

定理 1 设 $H=H_1\otimes H_2$，且 $\dim(H)=+\infty$，$\rho\in S_S(H)$ 当且仅当 $R_e(\rho)=0$。

证明 根据纠缠鲁邦以及无限维 Concurrence 纠缠度的定义，结果显然成立。

2 结论

本文研究了无限维两体量子态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒，得到了可分性鲁棒以及纠缠鲁棒的若干基本性质，获得了无限维两体量子系统态的可分性鲁棒和纠缠鲁棒分别为零的等价条件，进一步得到了无限维两体量子态的可分性鲁棒与可分态的边缘态以及可分纯态之间的关系，推广了有限维两

体量子态的相应结果，其结果对于量子关联的深入研究具有一定的理论意义。

参考文献：

[1] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[2] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions[J]. Phys Lett A, 1996, 223: 1-14.

[3] Chen K, Wu L A. A matrix realignment method for recognizing entanglement[J]. Quant Inf Comput, 2003, 3: 193-202.

[4] Nielsen M A, Kempe J. Separable states are more disordered globally than locally[J]. Phys Rev Lett, 2001, 86: 5184-5187.

[5] Horodecki P. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition[J]. Phys Lett A, 1997，232: 333-339.

[6] Hou J C. A characterization of positive linear maps and criteria of entanglement for quantum states[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2010，43:385201.

[7] Wang Y Z，Hou J C，Guo Y. An entanglement criterion for states in infinite dimensional multipartite quantum systems[J]. Chinese Science Bulletin. 2012,57(14): 1643-1647.

[8] Guo Y, Hou J C, Wang Y C. Concurrence for infinite-dimensional quantum systems[J]. Quantum Information Processing, 2013, 12, 2641-2653.

[9] Chen K, Sergio A， Fei S M. Entanglement of Formation of Bipartite Quantum States[J]. Phys Rev Lett, 2005, 95, 210501.

[10] Soojoon L, Chi D P, Oh S D, Kim J. Convex-roof extended negativity as an entanglement measure for bipartite quantum systems[J]. Phys. Rev. A., 2003, 68: 062304.

[11] Ollivier H, Zurek W H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations[J]. Physical review letters, 2001, 88(1): 017901.

[12] Luo S, Fu S. Measurement-induced nonlocality[J]. Physical review letters, 2011, 106(12): 120401.

[13] Oppenheim J, Horodecki M, Horodecki P, et al. Thermodynamical approach to quantifying quantum correlations[J]. Physical review letters, 2002, 89(18): 180402.

[14] Vidal G, Tarrach R. Robustness of entanglement[J]. Physical Review A, 1999, 59(1): 141.

[15] Modi K, Brodutch A, Cable H, et al. The classical-quantum boundary for correlations:discord and related measures[J]. Rev. Mod. Phys. 2012,84(4): 1655-1707.