文章编号: 1674-8085(2017)01-0018-07

# 具有群体效应和时滞的扩散捕食-食饵 系统的 Hopf 分支

## 汤小松

(井冈山大学数理学院, 江西, 吉安 343009)

**摘 要:**研究了一类具有群体效应和时滞的扩散捕食-食饵系统的 Hopf 问题。首先,通过分析特征方程,讨论了 该系统正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性。然后,利用 Faria 规范型和偏泛函微分方程中心流形定理,获得 了决定 Hopf 分支性质的计算公式。最后,通过数值模拟,得到了该系统的稳定空间周期解。 关键词:捕食-食饵系统;群体效应;时滞;扩散;Hopf 分支;周期解

中图分类号: O175.1 文献标识码: A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.01.004

## HOPF BIFURCATION OF A DIFFUSIVE PREDATOR-PREY MODEL WITH HERD BEHAVIOR AND DELAY

#### TANG Xiao-song

(School of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China)

**Abstract:** We investigate spatiotemporal dynamics problem of a diffusive predator-prey model with herd behavior and delay. Firstly, the stability of the positive equilibrium is discussed by analyzing the corresponding characteristic equation. Furthermore, the formula determining the properties of the Hopf bifurcation are obtained by applying the Faria normal form and the center manifold argument for partial functional differential equations. Finally, some numerical simulations are carried out and we obtain the stable spatial periodic solutions. **Key words:** predator–prey system; herd behavior; delay; diffusion; Hopf bifurcation; periodic solutions

## 0 引言

生物数学是现代应用数学中的重要分支和热 点之一。随着计算机的快速发展和生物数学的深入研 究,越来越多的生态数学模型被提出来,而捕食-食 饵模型又是众多生态数学模型当中的重要模型之 一。众所周知,功能性反应函数是反映捕食-食饵模 型中捕食者与食饵之间相互作用关系的关键因素。 为了描述不同种群之间相互作用的特征,许多类型 的功能性反应函数被提出来,常见的功能性反应函 数主要有Holling I-IV型、比率型、Hassell- Varley 型、Beddington-DeAngelis型、Crowley-Martin型等, 且关于这些常见的功能性反应函数已有大量的研 究工作。2011年,Ajraldi等<sup>[1]</sup>提出了一类更为精细 化的具有群体效应的捕食-食饵模型,即用带有食饵 平方根的功能性反应函数来描述具有这种群体效 应的捕食-食饵系统的动力学。对于这类更为精细化 的具有群体效应的捕食-食饵系统的研究,已取得了 一定的研究成果,具体见文献[2-8]。

最近, Xu 和 Yuan<sup>[3]</sup>研究了如下具有群体效应 和时滞的常微捕食-食饵系统:

收稿日期: 2016-07-13; 修改日期: 2016-08-28

基金项目: 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ150771)

作者简介:汤小松(1975-),男,江西永新人,讲师,博士,主要从事微分方程和动力系统研究(E-mail: tangxs@jgus.edu.cn ).

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \sqrt{u}v, \\ \frac{dv}{dt} = -av^2 + b\sqrt{u_t}v, \end{cases}$$
(1)

其中u表示食饵的密度,v表示捕食者的密度,a > 0表示二次死亡的系数,b > 0表示转化率, $\sqrt{u_t}$ 表示  $\sqrt{u(t-\tau)}$ ,  $\tau$ 是时滞。诸多学者利用Hassard规范型 和中心流形理论讨论了系统(1)的Hopf分支的存在 性,并得到了系统(1)由Hopf分支分支出来的周期 解。

考虑到种群在空间上的随机游走和迁移,用带 有扩散项的模型来刻画种群的时空动力学更为合 理。为此,我们引入扩散,则得到了具有群体效应 和时滞的扩散捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)(1 - u(t,x)) - \sqrt{u(t,x)}v(t,x), t > 0, \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} - av^2(t,x) + b\sqrt{u_t}v(t,x), t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,\pi) = 0, t > 0, \\ u(t,x) = \phi(t,x) \ge 0, v(t,x) = \phi(t,x) \ge 0, (t,x) \in [-\tau,0] \times [0,\pi], \end{cases}$$
(2)

其中 $\sqrt{u_t}$ 表示 $\sqrt{u(t-\tau,x)}$ ,  $\tau$ 是时滞。据笔者所知, 有关系统(2)的研究结果还没有报道。因此,本文将 利用Faria规范型和中心流形理论对系统(2)进行研 究,得到了该系统正平衡点的稳定性和Hopf分支的 存在性结果。为验证本文结果的有效性,通过 MATLAB程序进行数值模拟,获得了该系统的空间 周期解。

## 1 正平衡点的稳定性和Hopf分支的

#### 存在性

为讨论系统(2)正平衡点的稳定性和Hopf分支的存在性。为此,先给出该系统的平衡点,即(0,0),

(1,0) 和 $(u^*, v^*) = (1 - \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{b}{a}})$  (0 < b < a)。下面 仅讨论时滞  $\tau$  对系统(2)动力学的影响。

为讨论方便,用u(t)代替u(t,x),v(t)代替 v(t,x), $u(t-\tau)$ 代替 $u(t-\tau,x)$ , $v(t-\tau)$ 代替  $v(t-\tau,x)$ 。令

$$f(u,v) = u(1-u) - \sqrt{uv}, \quad g(v,w) = -av^2 + b\sqrt{wv},$$
(3)

则得到系统(2)在正平衡点(u\*,v\*)的线性化,即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = D\Delta \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} u(t-\tau) \\ v(t-\tau) \end{pmatrix}$$
(4)

其中
$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$
,  $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ ,  
这里 $a_{11} = \frac{3b}{2a} - 1$ ,  $a_{12} = -\sqrt{1 - \frac{b}{a}}$ ,  $a_{21} = \frac{b^2}{2a}$ ,  
 $a_{22} = -b\sqrt{1 - \frac{b}{a}}$ 。这样,可得到系统(4)的如下特征  
方程:

$$\det(\lambda I - M_k - A_0 - A_1 e^{-\lambda \tau}) = 0$$
 (5)

其中*I*是2阶方阵,  $M_k = -k^2 diag\{d_1, d_2\}$ ,  $k \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。则由(5)式可得到正平衡点  $(u^*, v^*)$ 处的特征方程:

$$\lambda^{2} - [a_{11} + a_{22} - (d_{1} + d_{2})k^{2}]\lambda + d_{1}d_{2}k^{4} - (a_{11}d_{2} + a_{22}d_{1})k^{2} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}e^{-\lambda\tau} = 0$$
(6)

当 $\tau = 0$ 时, (6)式变为

$$\lambda^2 - T_k \lambda + D_k = 0 \tag{7}$$

其中

$$T_k = a_{11} + a_{22} - (d_1 + d_2)k^2$$

$$D_{k} = d_{1}d_{2}k^{4} - (a_{11}d_{2} + a_{22}d_{1})k^{2} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
(8)

当 $\tau \neq 0$ 时,将开始讨论由时滞诱发的Hopf分支的存在性。为此,我们总假定系统(2)的正平衡点 $(u^*,v^*)$ 当 $\tau = 0$ 时是渐近稳定的,这意味着对任意的 $k \in \mathbb{N}_0$ , $T_k < 0$ , $D_k > 0$ 。令 $i\omega$ 是特征方程(6)的根,则 $\omega$ 满足方程

(10)

$$-\omega^{2} - [a_{11} + a_{22} - (d_{1} + d_{2})k^{2}]i\omega + d_{1}d_{2}k^{4} - (9)$$
$$(a_{11}d_{2} + a_{22}d_{1})k^{2} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}e^{-i\omega\tau} = 0$$
分离(9)式的实部和虚部,则有

$$\begin{cases} -\omega^2 + d_1 d_2 k^4 - (a_{11} d_2 + a_{22} d_1) k^2 + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \cos \omega \tau = 0, \\ (a_{11} + a_{22} - (d_1 + d_2) k^2) \omega - a_{12} a_{21} \sin \omega \tau = 0, \end{cases}$$

这意味着

$$\omega^4 + P_k \omega^2 + Q_k = 0, \tag{11}$$
  
其中

$$\begin{cases} P_k = (d_1k^2 - a_{11})^2 + (d_2k^2 - a_{22})^2, \\ Q_k = D_k [d_1d_2k^4 - (a_{11}d_2 + a_{22}d_1)k^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})] \end{cases}$$
(12)

设  

$$R_k = d_1 d_2 k^4 - (a_{11} d_2 + a_{22} d_1) k^2 + (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21})$$
(13)

则由 $D_k > 0$ 可知 $Q_k$ 的符号与 $R_k$ 一致。

为确定k的取值,需要满足条件:

(H)  $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} < 0$ .

注意到 $R_k$ 是关于 $k^2$ 的二次多项式且 $R_0 < 0$ ,则 由(13)式,可推出存在 $N_1 \in \mathbb{N}_0$ ,使得

$$\begin{cases} R_k < 0, 0 \le k \le N_1, \\ R_k > 0, k \ge N_1 + 1, k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$
(14)

再由 $P_k > 0$ 和(14)式可得出对于 $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_1\}$ , 方程(11)仅有唯一正根 $\omega_k$ ,即

$$\omega_{k} = \sqrt{\frac{-P_{k} + \sqrt{P_{k}^{2} - 4Q_{k}}}{2}}$$
(15)

但对于 $k \ge N_1 + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , 方程(11)没有正实根。

根据以上分析,则有如下结果:

**引理 1** 假设条件(H)和对于任意的 $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $T_k < 0$ ,  $D_k > 0$ 成立。则对 $k \in \{0,1,2,\dots, N_1\}$ 特征 方程(7)有一对纯虚根 $i\omega$ , 但当 $k \ge N_1 + 1$ 时,特征 方程(7)没有纯虚根。

由(10)式, 
$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, N_1\}$$
, 有

$$\tau_{kj} = \tau_{k0} + \frac{2\pi j}{\omega_k}$$

$$\tau_{k0} = \frac{1}{\omega_k} \arccos \frac{\omega_k - D_k - a_{12} a_{21}}{-a_{12} a_{21}}$$
(16)

显然,

$$\tau_{k0} = \min_{j \in \mathbb{N}_0} \{ \tau_{kj} \} , \quad k \in \{0, 1, 2, \cdots, N_1 \}$$
(17)

令 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\beta(\tau)$ 是特征方程(6)在 $\tau = \tau_{kj}$ 邻近并满足 $\alpha(\tau_{kj}) = 0$ ,  $\beta(\tau_{kj}) = \omega_k$ 的根,则可得横截条件成立。

**引理 2** 对  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_1\}$  和任意的  $j \in \mathbb{N}_0$ , 有  $\frac{d \operatorname{Re}(\lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_{kj}} > 0$ 。

证明:特征方程(6)两边关于<sup>7</sup>求导,则可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda - T_k)e^{\lambda\tau}}{-a_{12}a_{21}} - \frac{\tau}{\lambda}$$

又由(10)式和(12)式,有  
Re(
$$(\frac{d\lambda}{d\tau})$$
)<sup>-1</sup>|<sub>r=r\_k</sub> = Re( $\frac{(2\lambda - T_k)e^{\lambda \tau}}{-a_{12}a_{21}\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}$ )|<sub>r=r\_k</sub> =   
Re( $\frac{(2i\omega_k - T_k)e^{i\omega_k \tau_{kj}}}{-a_{12}a_{21}i\omega_k} - \frac{\tau_{kj}}{i\omega_k}$ )=  
 $\frac{T_k a_{12}a_{21}\sin\omega_k \tau_{kj} - 2\omega_k a_{12}a_{21}\cos\omega_k \tau_{kj}}{a_{12}^2a_{21}^2\omega_k}$ =

$$\frac{2\omega_k^2 + P_k}{a_{12}^2 a_{21}^2}$$

这意味着结论成立。引理2得证,证毕。

根据引理1和引理2并结合偏泛函微分方程的 定性理论<sup>[9]</sup>,则有如下结果:

**定理 1** 假设条件(H)和对于任意的 $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $T_k < 0$ ,  $D_k > 0$ 成立, 且 $\omega_k \approx \tau_{kj}$ 分别由(15)和(16) 所定义。记 $\tau^* = \min_{k \in \{0, 1, 2, \dots, N_i\}} \tau_{k0}$ , 则

(i) 当τ∈[0,τ\*)时,系统(2)正平衡点(u\*,v\*)是
 新近稳定的;当τ∈(τ\*,+∞)时,系统(2)正平衡点
 (u\*,v\*)是不稳定的;

(ii) 当 $\tau$ 穿越 $\tau_{kj}$  ( $k \in \{0,1,2,\dots,N_1\}$ ,  $j \in N_0$ ) 时,系统(2)在正平衡点 $(u^*,v^*)$ 附近发生Hopf分支。 此外,当k = 0时,系统(2)分支出来的是空间齐次 周期解;当 $k \ge 1$ 时,系统(2)分支出来的是空间非齐 次周期解。

# 2 Hopf分支的方向和稳定性

由定理1可知当 $\tau$ 穿越 $\tau_{kj}$  ( $k \in \{0,1,2,\dots,N_1\}$ ,  $j \in N_0$ )时,系统(2)在正平衡点( $u^*, v^*$ )附近发生 Hopf分支。在本小节,我们通过Faria规范型和中心 流形理论<sup>[10-11]</sup>来讨论Hopf分支的方向和稳定性。由 于方法是标准的,故只给出主要结果,详细推导过 程读者可参考文献[10-12]。不失一般性,用 $\tau^*$ 记 $\tau_{kj}$ ( $k \in \{0,1,2,\dots,N_1\}$ ,  $j \in N_0$ )中的任意一个临界值, 且特征方程(6)在 $\tau_{kj}$ 处的一对纯虚根 ± $i\omega_k$ 记为 ± $i\omega^*$ 。

设  $u(\cdot,t) = u(\cdot,\tau t) - u^*$ ,  $v(\cdot,t) = v(\cdot,\tau t) - v^*$ 和  $\tilde{U}(t) = (\tilde{u}(\cdot,t), \tilde{v}(\cdot,t))$ , 并且仍用 $u(\cdot,t)$ ,  $v(\cdot,t)$ , U(t)分别代替 $\tilde{u}(\cdot,t)$ ,  $\tilde{v}(\cdot,t)$ ,  $\tilde{U}(t)$ , 则系统(2)在相空间 C = C([-1,0], X),

$$X = \{(u, v) \in W^{2,2}(0, \pi) \mid \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, x = 0, \pi\}$$

中可写为

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = \tau D\Delta U(t) + L(\tau)(U_t) + f(U_t,\tau) ,$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in C$$
(18)

其中 $L(\tau)(\cdot): c \to X 和 f: c \times R \to X 分别定义如下:$ 

$$f(\varphi,\tau) = \tau \begin{pmatrix} f^{(1)}(\tau) \\ f^{(2)}(\tau) \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \sum_{i+j\geq 2} \frac{1}{i!j!} f^{(1)}_{ij} \varphi^{i}_{1}(0) \varphi^{i}_{2}(0) \\ \sum_{i+j\geq 2} \frac{1}{i!j!} f^{(2)}_{ij} \varphi^{i}_{1}(-1) \varphi^{i}_{2}(0) \end{pmatrix}$$
(19)

$$L(\tau)(\varphi) = \tau \begin{pmatrix} a_{11}\varphi_1(0) & a_{12}\varphi_2(0) \\ a_{21}\varphi_1(-1) & a_{22}\varphi_2(0) \end{pmatrix}$$
(20)

其中

$$f^{(1)}(u,v) = (u+u^{*})(1-u-u^{*}) - \sqrt{u+u^{*}}(v+v^{*}),$$
  

$$f^{(2)}(w,v) = -a(v+v^{*})^{2} + b\sqrt{w+u^{*}}(v+v^{*}),$$
  

$$f^{(1)}_{ij} = \frac{\partial^{i+j}f^{(1)}}{\partial u^{i}\partial v^{j}}(u^{*},v^{*}), \quad f^{(2)}_{ij} = \frac{\partial^{i+j}f^{(1)}}{\partial w^{i}\partial v^{j}}(u^{*},v^{*}) \circ$$
  

$$\frac{\partial^{i}}{\partial x}\tau = \tau^{*} + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \Lambda_{0} = \{-i\omega^{*}\tau^{*}, i\omega^{*}\tau^{*}\}, \quad \mathbb{N}$$

设 $\tau = \tau^* + \alpha$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\Lambda_0 = \{-i\omega^*\tau^*, i\omega^*\tau^*\}$ , 则 (18)式可写成

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = \tau D\Delta U(t) + L(\tau)(U_t) + F(U_t,\tau)$$
(21)

其中  $F(\varphi, \alpha) = \alpha D\Delta \varphi(0) + L(\alpha)(\varphi) + f(\varphi, \tau^* + \alpha)$ ,  $\varphi \in c \circ \tau^* D\Delta$ 在空间中的特征值为 $\mu_k^i = -d_i \tau^* k^2$ ,

i=1,2,  $k \in \mathbb{N}_0$ , 对应于特征值 $\mu_k^i$ 的特征向量为

$$\beta_{k}^{1} = \begin{pmatrix} \gamma_{k}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \beta_{k}^{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_{k}(x) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{k}(x) = \frac{\cos kx}{\|\cos kx\|_{2,2}}, \ k \in \mathbb{N}_{0}$$
(22)

令  $\mathbf{B}_k = span\{\langle v(\cdot), \beta_k^j \rangle \beta_k^j | v \in c, i = 1, 2\}$  。 假 设  $z_t(\theta) \in C = C([-1,0], R^2)$ 和

$$z_{i}^{T}(\theta) \begin{pmatrix} \beta_{k}^{1} \\ \beta_{k}^{2} \end{pmatrix} \in B_{k}$$
(23)

则在 $B_k$ 上的线性PDE等价于如下 $C = C([-1, 0], R^2)$ 上的FDE:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \mu_k^1 & 0\\ 0 & \mu_k^2 \end{pmatrix} z(t) + L(\tau^*)(z_t)$$
 (24)

其特征方程由(6)式给出。

假设存在 $k \in N_0$ ,使得当 $\tau = \tau^*$ 时,特征方程 (6)对于给定的k有一对纯虚根± $i\omega^*$ ,而所有其余的 特征根具有负实部。定义有界变差函数  $\eta(\theta) \in BV([-1,0], R)$ 使得

$$\mu_k \psi(0) + L(\tau^*) \psi = \int_{-1}^0 \mathrm{d}\eta(\theta) \psi(\theta) \qquad (25)$$

和在 $C^* \times C$ ,  $C^* = C([0,1], R^{2^*})$ 上定义如下双线性函数:

 $\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta) \mathrm{d}\eta(\theta)\phi(\xi) \mathrm{d}\xi ,$  $\psi \in C^{*}, \quad \phi \in C \circ$ 

于是,对给定的k,(24)式的特征空间P及其对偶空间P上的对偶基 $\Phi_k$ 和 $\Psi_k$ 如下给出:

$$\Phi_{k} = (pe^{i\omega^{*}\tau^{*}\theta}, pe^{-i\omega^{*}\tau^{*}\theta}),$$
$$\Psi_{k} = col(q^{T}e^{-i\omega^{*}\tau^{*}s}, q^{T}e^{i\omega^{*}\tau^{*}s})$$

并且满足 <  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$  >=  $I_2$ , 其中  $I_2$ 是2阶方阵,

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\omega^* + d_1k^2 - a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix},$$
(26)

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \rho \left( \frac{i\omega^* + d_1k^2 - a_{11}}{a_{21}} e^{i\omega^*\tau^*} \right)$$

这里, 
$$\rho = (1 + \tau^* (i\omega^* + d_1k^2 - a_{11}) + \frac{(\tau^* a_{22} + e^{i\omega^*\tau^*})(i\omega^* + d_1k^2 - a_{11})^2}{a_{12}a_{21}})^{-1}$$
。

根据文献[10,12]中计算规范型的方法,可得下面中心流形上的规范型:

$$\dot{z} = Bz + \left(\frac{A_{k1}z_1\alpha}{\overline{A}_{k1}z_2\alpha}\right) + \left(\frac{A_{k2}z_1^2z_2}{\overline{A}_{k2}z_1z_2^2}\right) + O(|z|\alpha^2 + |z|^4)$$
(27)

其中,

$$A_{k1} = -k^2 (d_1 q_1 p_1 + d_2 q_2 p_2) + i\omega^* q^T p$$
(28)

$$A_{k2} = \frac{i}{2\omega^{*}\tau^{*}} (B_{k20}B_{k11} - 2|B_{k11}|^{2} - \frac{1}{3}|B_{k02}|^{2}) + \frac{1}{2} (B_{k21} + D_{k21})$$
(29)

这里,

$$\begin{split} B_{k20} &= \begin{cases} \frac{\tau^*}{\sqrt{\pi}} (C_1 q_1 + C_2 q_2), & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \\ B_{k11} &= \begin{cases} \frac{\tau^*}{\sqrt{\pi}} (C_3 q_1 + C_4 q_2), & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \\ B_{k02} &= \begin{cases} \frac{\tau^*}{\sqrt{\pi}} (\overline{C}_1 q_1 + \overline{C}_2 q_2), & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \\ B_{k21} &= \begin{cases} \frac{\tau^*}{\pi} C_5, & k = 0, \\ \frac{3\tau^*}{2\pi} C_5, & k \neq 0, \end{cases} \end{split}$$

其中,

$$\begin{split} C_1 &= f_{20}^{(1)} p_1^2 + 2 f_{11}^{(1)} p_1 p_2 + f_{02}^{(1)} p_2^2 ,\\ C_2 &= f_{20}^{(2)} p_1^2 e^{-2i\omega^*\tau^*} + 2 f_{11}^{(1)} p_1 p_2 e^{-i\omega^*\tau^*} ,\\ C_3 &= f_{20}^{(1)} \mid p_1 \mid^2 + 2 f_{11}^{(1)} \operatorname{Re} \{ p_1 \overline{p}_2 \} + f_{02}^{(1)} \mid p_2 \mid^2 , \end{split}$$

$$\begin{split} C_4 &= f_{20}^{^{(2)}} \mid p_1 \mid^2 + 2f_{11}^{^{(1)}} \operatorname{Re} \{ p_1 \overline{p}_2 e^{-i\omega^* \tau^*} \} ,\\ C_5 &= q_1 (f_{30}^{^{(1)}} p_1 \mid p_1 \mid^2 + f_{03}^{^{(1)}} p_2 \mid p_2 \mid^2 + \\ & f_{21}^{^{(1)}} (p_1^2 \mid \overline{p}_2 \mid + 2 \mid p_1 \mid^2 p_2) + f_{12}^{^{(1)}} (\mid \overline{p}_1 \mid p_2^2 + \\ & 2p_1 \mid p_2 \mid^2)) + q_2 (f_{30}^{^{(2)}} p_1 \mid p_1 \mid^2 e^{-i\omega^* \tau^*} + \\ & f_{21}^{^{(2)}} (p_1^2 \overline{p}_2 e^{-2i\omega^* \tau^*} + 2 \mid p_1 \mid^2 p_2)) \end{split}$$

和

$$D_{k21} = \begin{cases} E_0, & k = 0, \\ E_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} E_{2k}, & k \neq 0, \end{cases}$$

这里对j=0,2k,有

$$E_{j} = \frac{2\tau^{*}}{\sqrt{\pi}} q^{T} \begin{pmatrix} F_{1}h_{j11}^{(1)}(0) + F_{2}h_{j11}^{(2)}(0) + \overline{F}_{1}h_{j20}^{(1)}(0) + \overline{F}_{2}h_{j20}^{(2)}(0) \\ F_{3}h_{j11}^{(1)}(-1) + \overline{F}_{3}h_{j20}^{(1)}(-1) + F_{4}h_{j11}^{(2)}(0) + \overline{F}_{4}h_{j20}^{(2)}(0) \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{split} F_1 &= f_{20}^{(1)} p_1 + f_{11}^{(1)} p_2 , \quad F_2 = f_{11}^{(1)} p_1 + f_{02}^{(1)} p_2 , \\ F_3 &= f_{20}^{(2)} p_1 e^{-i\omega^*\tau^*} + f_{11}^{(2)} p_2 , \quad F_4 = f_{11}^{(2)} p_1 e^{-i\omega^*\tau^*} , \end{split}$$

和

$$\begin{split} h_{k20} &= \frac{1}{i\omega^*\tau^*} (B_{k20} e^{i\omega^*\tau^*\theta} p + \frac{1}{3} \overline{B}_{k02} e^{-i\omega^*\tau^*\theta} \overline{p}) + e^{2i\omega^*\tau^*\theta} G_{k1} \\ h_{k11}(\theta) &= \frac{2}{i\omega^*\tau^*} (B_{k11} e^{i\omega^*\tau^*\theta} p - \overline{B}_{k11} e^{-i\omega^*\tau^*\theta} \overline{p}) + G_{k2}, \\ &\vdots \subseteq \mathbb{R}, \end{split}$$

$$G_{k1} = \begin{pmatrix} \sigma_{kj}(C_1(2i\omega^* - a_{22}e^{-2i\omega^*\tau^*}) + C_2a_{12}) \\ \hline (2i\omega^* - a_{11})(2i\omega^* - a_{22}e^{-2i\omega^*\tau^*}) - a_{12}a_{21}e^{-2i\omega^*\tau^*} \\ \hline \sigma_{kj}(C_1a_{21}e^{-2i\omega^*\tau^*} + C_2(2i\omega^* - a_{11})) \\ \hline (2i\omega^* - a_{11})(2i\omega^* - a_{22}e^{-2i\omega^*\tau^*}) - a_{12}a_{21}e^{-2i\omega^*\tau^*} \end{pmatrix},$$

$$G_{k2} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_{kj}(C_4a_{12} - C_3a_{22})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{2\sigma_{kj}(C_3a_{21} - C_4a_{11})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix},$$

其中,

$$\sigma_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & j = k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & j = 0, k \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & j = 2k \neq 0, \\ 0, & \ddagger \dot{\Sigma}. \end{cases}$$

作坐标变换 $z_1 = w_1 - iw_2$ ,  $z_2 = w_1 + iw_2$ , 以及

 $w_1 = r \cos \Theta$ ,  $w_2 = r \sin \Theta$ , 则规范型(27)式变为极 坐标形式:

$$\begin{cases} \bullet \\ r = \Gamma_{k1}\alpha r + \Gamma_{k2}r^3 + O(\alpha^2 r + |(r,\alpha)|^4), \\ \bullet \\ \Theta = -\omega^* \tau^* + O(|(r,\alpha)|), \end{cases}$$

(30)

其中 $\Gamma_{k1}$  = Re  $A_{k1}$ ,  $\Gamma_{k2}$  = Re  $A_{k2}$ 。于是, 根据文献[13] 可知 $\Gamma_{k1}\Gamma_{k2}$ 的符号可决定Hopf分支的方向,  $\Gamma_{k2}$ 的 符号可决定分支出来的周期解的稳定性, 具体结论 如下:

定理2 (i) 当 $\Gamma_{k1}\Gamma_{k2} < 0$ 时,系统(2)在临界值  $\tau = \tau^*$ 处发生的Hopf分支是超临界的。此外,如果  $\Gamma_{k2} < 0$ ,则系统(2)分支出来的空间周期解是稳定 的;如果 $\Gamma_{k2} > 0$ ,则系统(2)分支出来的空间周期解 是不稳定的;

(ii) 当 $\Gamma_{\mu}\Gamma_{\mu}$ >0时,系统(2)在临界值 $\tau = \tau^*$ 处



发生的Hopf分支是次临界的。此外,如果 $\Gamma_{k2} < 0$ ,则系统(2)分支出来的空间周期解是稳定的,如果 $\Gamma_{k2} > 0$ ,则系统(2)分支出来的空间周期解是不稳定的。

## 3 数值计算和模拟

在本小节,将利用MATLAB程序进行数值模拟 来验证本文结果的有效性。为此,选取参数:  $d_1 = 0.3$ ,  $d_2 = 1$ , a = 0.5, b = 0.35,则系统(2)的 正平衡点 $(u^*,v^*) = (0.3000, 0.3834)$ 。由(4)式并结 合直接计算,可得 $a_{11} = 0.0500$ ,  $a_{12} = -0.5477$ ,  $a_{21} = 0.0306$ ,  $a_{22} = -0.1917$ 。进而,由(8)式可推出 当 $\tau = 0$ 时,对任意的k,有 $T_k < 0$ ,  $D_k > 0$ 。由此 可知,系统(2)的正平衡点 $(u^*,v^*)$ 对任意的k都是渐 近稳定的。



图 1 当 $\tau = 2.0 < \tau^* = 2.198$ 时,系统(2)的正平衡点 $(u^*, v^*) = (0.3000, 0.3834)$ 是渐近稳定的。此时,参数值选取为:  $d_1 = 0.3$ ,  $d_2 = 1$ , a = 0.5, b = 0.35。

Fig.1 The positive equilibrium  $(u^*, v^*) = (0.3000, 0.3834)$  of system (2) is asymptotically stable when  $\tau = 2.0 < \tau^* = 2.198$ . Here, we set parameter values as  $d_1 = 0.3$ ,  $d_2 = 1$ , a = 0.5, b = 0.35.



图 2 当 $\tau = 2.2 > \tau^* = 2.198$ 时,系统(2)从正平衡点 $(u^*, v^*) = (0.3000, 0.3834)$ 附近分支出稳定的空间周期解。此时,参数值选取为: $d_1 = 0.3$ , $d_2 = 1$ , a = 0.5, b = 0.35。

Fig.2 The stable spatial periodic solution bifurcates from the positive equilibrium of system(2) when  $\tau = 2.2 > \tau^* = 2.198$ . Hrer, we set parameter values as  $d_1 = 0.3$ ,  $d_2 = 1$ , a = 0.5, b = 0.35.

下面考虑时滞对系统(2)空间动力学的影响。根 据(13)式和直接计算,可知只有当k = 0时 $R_k < 0$ , 而对所有 $k \ge 1$ ,总有 $R_k > 0$ 。由定理1可知,系统(2) 仅分支出空间齐次周期解。由(15)式和(17)式,可得  $\tau^* = 2.198$ , $\omega_0 = 0.2228$ 。由定理1可得,当 $\tau \in [0,\tau^*)$ 时,系统(2)的正平衡点 $(u^*,v^*)$ 是渐近稳定的,而当  $\tau \in (\tau^*,+\infty)$ 时,系统(2)的正平衡点 $(u^*,v^*)$ 是不稳定 的。因此,当时滞 $\tau$ 穿越临界值 $\tau^*$ 时,系统(2)在正 平衡点 $(u^*,v^*)$ 邻近发生Hop分支。又由(27)式和(30) 式,可得截断到三次项的规范型:

 $r = 0.0825\alpha r - 5.1229r^3$ 

其中 $\Gamma_{k1} = 0.0825$ ,  $\Gamma_{k2} = -5.1229$ 。由此易知,  $\Gamma_{k1}\Gamma_{k2} < 0$ 和 $\Gamma_{k2} < 0$ 。根据定理2,系统(2)在正平衡 点 $(u^*,v^*)$ 邻近发生的Hop分支是超临界的,且分支 出来的空间齐次周期解是稳定的。具体见图1、图2。

#### 4 结语

本文研究了时滞对一类具有群体效应的扩散 捕食-食饵系统(2)的 Hopf 问题的影响。以时滞为参 数并利用 Faria 规范型和中心流形理论,获得了系 统(2)的规范型,并由此可判定 Hopf 分支的方向和 稳定性。最后,选取参数值:  $d_1 = 0.3$ ,  $d_2 = 1$ , a = 0.5, b = 0.35和数值模拟,得到当  $\tau \in [0,\tau^*) = [0,2.198)$ 时,系统(2)的正平衡点( $u^*,v^*$ ) 是渐近稳定的,当 $\tau \in (\tau^*,+\infty)$ 时,系统(2)的正平衡 点( $u^*,v^*$ )是不稳定的。这样,系统(2)在正平衡点 ( $u^*,v^*$ )邻近发生 Hop 分支并分出了系统(2)的稳定 空间周期解,具体见图 1、图 2。

#### 参考文献:

 Ajraldi V, Pittavino M, Venturino E. Modeling herd behavior in population systems[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(4): 2319-2338.

- [2] Braza P A. Predator-prey dynamics with square root functional responses[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(4): 1837-1843.
- [3] Yuan S, Xu C, Zhang T. Spatial dynamics in a predator-prey model with herd behavior[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2013, 23(3): 033102.
- [4] Tang X, Song Y. Stability, Hopf bifurcations and spatial patterns in a delayed diffusive predator-prey model with herd behavior[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 254: 375-91.
- [5] Tang X, Song Y. Cross-diffusion induced spatiotemporal patterns in a predator-prey model with herd behavior[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2015, 24: 36-49.
- [6] Tang X, Song Y. Bifurcation analysis and Turing instability in a diffusive predator-prey model with herd behavior and hyperbolic mortality[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2015, 81: 303-314.
- [7] Xu Z, Song Y. Bifurcation analysis of a diffusive predator-prey system with a herd behavior and quadratic mortality[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2014, 38: 2994-3006.
- [8] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations[M]. New York: Springer Verlag, 1996.
- [9] Faria T. Bifurcation aspects for some delayed population models with diffusion[J]. Differential Equations with Applications to Biology, 1999, 21: 143-158.
- [10] Faria T. Normal forms and Hopf bifurcation for partial differential equations with delay[M]. Transactions of the American Mathematical Society, 2000, 352: 2217-2238.
- [11] Song Y, Peng Y, Zou X. Persistence, stability and Hopf bifurcation in a diffusive ratio-dependent predator-prey model with delay[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014, 24(7): 1450093.
- [12] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos[M].New York:Springer-Verlag, 2003.