文章编号：1674-8085(2017)01-0008-06

三阶中立型半线性时滞微分方程的振动性

*惠远先，王俊杰

（普洱学院数学与统计学院，云南，普洱　665000）

摘　要：研究了一类三阶中立型半线性时滞微分方程的振动性质。通过广义 Riccati 变换和不等式技巧，建立了保证此方程的一切解振动或者收敛到零的若干新的振动准则，推广和改进了近期文献的相关结论并给出了具体例子。

关键词：振动准则；三阶中立型半线性时滞微分方程；广义 Riccati 变换

中图分类号：O175.25　**文献标识码**：A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.01.002

OSCILLATORY RESULTS OF THIRD ORDER SEMILINEAR NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY ARGUMENT

*HUI Yuan-xian, WANG Jun-jie

(School of Mathematics and Statistics, Pu Er University, Pu Er 665000, China)

Abstract: We study the oscillatory criteria's of third order semilinear neutral differential equations with delay argument. Using a generalized Riccati inequality and integral averaging technique, some new sufficient criteria are established, which any solution of this equation will be oscillatory or converge to zero. The results can extend and improve the ones in recent literature. We also give a number of examples to prove their efficiency.

Key words: Oscillation Criteria; third order semilinear neutral differential equations with delay argument; generalized Riccati substitution.

考虑一类三阶中立型半线性时滞微分方程

$$[r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)]'+q(t)\left|x(\delta(t))\right|^{\beta-1}x(\delta(t))=0,\quad t\ge t_0 \tag{1}$$

的振动性。其中 $Z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$，$r(t)\in C^1([t_0,\infty),R)$，$p(t),q(t)\in C([t_0,\infty,R))$，$\alpha$，$\beta$ 是两个常数。

本文总假设下面条件成立

(H_1) $\alpha>0$，$\beta>0$，且 α，β 均为两个正奇数的商；

(H_2) $0\le p(t)\le p<1, q(t)\ge 0$；

(H_3) $r(t)\ge 0, r'(t)\ge 0, \int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s=+\infty$；

(H_4) $\tau(t)\in C^1([t_0,\infty),R), \tau(t)\le t,\ \lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=+\infty$；

(H_5) $\delta(t)\in C^1([t_0,\infty),R), \delta(t)>0, \delta'(t)>0, \delta(t)\le t,\ \lim\limits_{t\to\infty}\delta(t)=+\infty$。

定义 方程（1）的一个非平凡解称为振动解，如果它有任意大的零点，否则为非振动解。如果方程（1）的所有解都是振动的，则称方程（1）是振动的，否则为非振动方程。

微分方程的振动理论是微分方程定性理论的一个重要分支，它在生物制药、机械振动、控制工程、力学等领域具有广泛的应用价值。其中，由于二阶微分方程的力学意义相当明显，因而对它的研究更加深入和广泛，无论从方程的类型还是从研究的方法上都取得了长足的进展，得到了大量优秀成果[1-8]。例如，1983 年，Philos[1]建立了经典的 Emden-fowler

收稿日期：2016-08-14；修改日期：2016-09-30

基金项目：云南省教育厅基金项目（2015Y490）；普洱学院科技创新团队项目（2015CXTD003）；普洱学院校级课题（2015xjkt020）

作者简介：*惠远先(1983-)，男，河南南阳人，讲师，硕士，主要从事微分方程研究(E-mail:huiyuanxian1983@126.com);

王俊杰(1981-)，男，山西太原人，副教授，硕士，主要从事应用数学、偏微分方程模拟研究(E-mail:ynpewjj@126.com).

方程

$$x''(t)+q(t)\left|x(t)\right|^{\beta-1}x(t)=0$$

的一些振动准则并将结果进行了推广和改进；1986年，Yan[2]建立了经典的 Emden-Fowler 阻尼方程

$$x''(t)+g(t)x'(t)+q(t)\left|x(t)\right|^{\beta-1}x(t)=0$$

的一些振动准则。2006 年，Yuan[3]建立了方程

$$[r(t)\left|Z(t)\right|^{\alpha-1}Z(t)]'+q(t)\left|x(\delta(t))\right|^{\alpha-1}x(\delta(t))=0$$

的若干振动结果。2012 年，Liu[8]利用 Riccati 变换和积分技巧给出了一类广义二阶 Emden-Fowler 时滞微分方程

$$[r(t)\left|Z(t)\right|^{\alpha-1}Z(t)]'+q(t)\left|x(\delta(t))\right|^{\beta-1}x(\delta(t))=0$$

的振动性质。

目前，三阶时滞微分方程的振动结果还比较少[9-14]，对方程（1）的振动性还没有做过研究。本文通过构造更一般的广义 Riccati 变换得到广义 Riccati 不等式，利用不等式技巧等方法，给出了方程（1）的若干新的振动准则，所得结论将 Liu[8]中的相应结论推广到了三阶情形，而且将相应条件 $\alpha\ge\beta>0$ 推广到了 $\alpha>0,\beta>0$ 的一般情形。

1 引理

引理1 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解,则 $Z(t)$ 只有以下两种可能：

（I）$Z(t)>0, Z'(t)>0, Z''(t)>0$；

（II）$Z(t)>0, Z'(t)<0, Z''(t)>0$。

证明 设 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解，根据 $Z(t)$ 的定义得 $Z(t)\ge x(t)>0$，由方程（1）可得

$$[r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)]'=-q(t)\left|x(\delta(t))\right|^{\beta-1}x(\delta(t))\le 0,$$

所以 $r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)$ 单调非增且最终定号，$Z''(t)$ 有两种情况：$Z''(t)>0$ 或者 $Z''(t)<0$。

假设 $Z''(t)<0$，由于 $r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)\le 0$，所以存在一个充分大的数 $t_1>t_0$ 及 $K>0$，使得

$$r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)=-r(t)[-Z''(t)]^{\alpha}\le$$
$$-r(t_1)[-Z''(t_1)]^{\alpha}\le -K,\ t>t_1>t_0$$

对上式两边从 t_1 到 t 积分，可得

$$Z'(t)\le Z'(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left(\frac{K}{r(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}s$$

令 $t\to+\infty$，由条件 (H_3) 可得 $Z'(t)\to-\infty$，所以存在 $t_2>t_1$ 及正数 $K_1>0$，使得

$$Z'(t)\le -K_1, t>t_2>t_1,$$

两边从 t_2 到 t 同时积分得

$$Z(t)\le Z(t_2)-K_1(t-t_2),$$

令 $t\to+\infty$，则 $Z(t)\to-\infty$，这与 $Z(t)>0$ 矛盾，所以 $Z''(t)<0$ 的假设不成立，$Z''(t)>0$ 成立，从而 $Z(t)$ 只有（I)、（II）两种可能性。

引理 2[1] 设存在函数 $A(\theta)>0, B(\theta)>0$ 且 $\theta>0$，则

$$Bu-Au^{\frac{\theta+1}{\theta}}\le\frac{\theta^{\theta}}{(\theta+1)^{\theta+1}}\frac{B^{\theta+1}}{A^{\theta}}。$$

引理 3 设 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解，且 $Z(t)$ 满足（I)，则

$$[r(t)Z''(t)^{\alpha}]'+Q_1(t)Z^{\beta}(\delta(t))\le 0 \tag{2}$$

其中 $Q_1(t)=q(t)[(1-p(\delta(t)))]^{\beta}$。

证明 由 $Z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$ 可得

$$x(t)=Z(t)-p(t)x(\iota(t)),$$

利用条件 (H_4) 及 $Z'(t)>0$ 可得

$$x(t)=Z(t)-p(t)x(\tau(t))\ge Z(t)(1-p(t)),$$
$$x(\delta(t))^{\beta}\ge Z(\delta(t))^{\beta}(1-p(\delta(t)))^{\beta},$$

根据方程（1）可得

$$[r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)]'+Q_1(t)Z^{\beta}(\delta(t))\le 0。$$

引理 4[14] 设 $Z(t)>0,\ Z'(t)>0,\ Z''(t)>0,$ $Z'''(t)\le 0, t\ge T_{\theta}$，则存在 $\gamma\in(0,1)$ 和 $T_{\gamma}>T_{o}$，使得

$$\frac{Z(t)}{Z'(t)}\ge\gamma t,\quad t\ge T_{\gamma}$$

引理 5 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解，且 $Z(t)$ 满足（II)，假定

$$\int_{t_1}^{+\infty}\int_{v}^{+\infty}\left(\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{+\infty}q(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=+\infty \tag{3}$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

证明 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解，且 $Z(t)$ 满足(II)，由于 $Z(t)>0$ 且 $Z'(t)<0$，根据单调有界定理 $\lim\limits_{t\to+\infty}Z(t)$ 存在，记 $\lim\limits_{t\to+\infty}Z(t)=l$，则 $l\ge 0$。

假设 $l>0$，则对任意的 $0<\varepsilon<\dfrac{l(1-p)}{p}$，$l+\varepsilon>Z(t)>l$ 有

$$x(t)=Z(t)-p(t)x(\tau(t))\ge$$
$$l-(l+\varepsilon)P=N(l+\varepsilon)>NZ(t)$$

其中 $N=\dfrac{l-(1+\varepsilon)P}{1+\varepsilon}>0$。

利用条件(H_1)、(H_2)和 $Z'(t)<0$ 可得

$$[r(t)(Z''(t))^{\alpha}]'=-q(t)(x(\delta(t)))^{\beta}\ge-(Nl)^{\beta}q(t)$$

两边从 u 到 $+\infty$ 同时积分得

$$Z''(u)\ge(Nl)^{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\frac{1}{r(u)}\int_u^{+\infty}q(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

两边关于 u 从 v 到 $+\infty$ 积分，关于 v 从 t_1 到 $+\infty$ 积分得

$$Z(+\infty)\le-(Nl)^{\frac{\beta}{\alpha}}\int_{t_1}^{+\infty}\int_v^{+\infty}\frac{1}{r(u)}\int_u^{+\infty}q(\xi)\mathrm{d}\xi)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\infty,$$

这与 $Z(t)>0$ 矛盾，于是 $\lim\limits_{t\to+\infty}Z(t)=l=0$，又因为 $0\le x(t)\le Z(t)$，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ 得证。

引理 6 设 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解，$Z(t)$ 满足（I），如果存在函数 $\rho(t)\in C^1([t_0,\infty),\mathbf{R}^+)$ 且 $\dfrac{\rho'(t)}{\rho(t)}\ge0$。定义 $\varpi(t)=\rho(t)\dfrac{r(t)(Z''(t))^{\alpha}}{(Z'(\delta(t)))^{\beta}}$，则

$$\varpi'(t)\le-\rho(t)Q_1(t)(\gamma\delta(t))^{\beta}+$$
$$Q_2(t)\varpi(t)-\frac{\lambda\delta'(t)m}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\lambda}}}\varpi^{\frac{\lambda+1}{\lambda}},\quad t>T \tag{4}$$

其中：$Q_1(t)=q(t)[(1-p(\delta(t)))]^{\beta}$，$Q_2(t)=\dfrac{\rho'(t)}{\rho(t)}$，$T=\max\{T_1,T_2\}$，$\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$，

$$m=\begin{cases}m_1, & \beta>\alpha>0,\\ m_2, & \alpha\ge\beta>0.\end{cases}$$

证明 由 $\varpi(t)$ 的定义及引理 3、引理 4 可得

$$\varpi'(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\varpi(t)+\rho(t)\frac{[r(t)(Z''(t))^{\alpha}]'}{(Z'(\delta(t)))^{\beta}}-$$
$$\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z''(t))^{\alpha}Z''(\delta(t))\delta'(t)}{Z'^{\beta+1}(\delta(t))}\le$$
$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\varpi(t)-\rho(t)Q_1(t)(\gamma t)^{\beta}-$$
$$\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z''(t))^{\alpha}Z''(\delta(t))\delta'(t)}{Z'^{\beta+1}(\delta(t))}\le$$
$$-\rho(t)Q_1(t)(\gamma\delta(t))^{\beta}+Q_2(t)\varpi(t)-$$
$$\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z''(t))^{\alpha}Z''(\delta(t))\delta'(t)}{Z'^{\beta+1}(\delta(t))}$$

(i)当 $\beta>\alpha>0$ 时

$$-\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z''(t))^{\alpha}Z''(\delta(t))\delta'(t)}{Z'^{\beta+1}(\delta(t))}=$$
$$-\frac{(\rho(t)r(t))^{1+\frac{1}{\alpha}}(Z''(t))^{\alpha+1}}{(Z'(\delta(t)))^{\beta+\frac{\beta}{\alpha}}}\cdot$$
$$\frac{\beta Z''(\delta(t))\delta'(t)}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}Z''(t)(Z'(\delta(t)))^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}$$

由引理 2 知

$$[r(t)Z''(t)^{\alpha}]'=r'(t)Z''(t)^{\alpha}+\alpha r(t)(Z''(t))^{\alpha-1}Z'''(t)\le0,$$

因为 $\alpha>0,r(t)\ge0,r'(t)\ge0,Z''(t)>0$，故 t 充分大时，$Z'''(t)\le0$，故 $\dfrac{Z''(\delta(t))}{Z''(t)}\ge1$。

又因为 $\beta>\alpha>0$ 时 $(Z'(\delta(t)))^{\frac{\beta}{\alpha}-1}$ 单调递增，故存在充分大的 $T_1>t_2$，使

$$(Z'(\delta(t)))^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\ge(Z'(\delta(T_1)))^{\frac{\beta}{\alpha}-1},t>T_1,$$

记 $m_1=\min\{1,(Z'(\delta(T_1)))^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\}$，则

$$(Z'(\delta(t)))^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\ge(Z'(\delta(T_1)))^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\ge m_1,t>T_1,$$

从而

$$-\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z'(t)^{\alpha}Z'(\delta(t))\delta'(t)}{Z^{\beta+1}(\delta(t))}\le-\frac{\alpha\delta'(t)m_1}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}\varpi^{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

所以，当 $\beta>\alpha>0$ 时

$$\varpi'(t)\le-\rho(t)Q_1(t)(\gamma\delta(t))^{\beta}+$$
$$Q_2(t)\varpi(t)-\frac{\alpha\delta'(t)m_1}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}\varpi^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{5}$$

(ii)当 $\alpha\ge\beta>0$ 时

$$-\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z''(t))^{\alpha}Z''(\delta(t))\delta'(t)}{Z'^{\beta+1}(\delta(t))}=$$
$$-\frac{(\rho(t)r(t))^{1+\frac{1}{\beta}}(Z''(t))^{\alpha+\frac{\alpha}{\beta}}}{(Z'(\delta(t)))^{\beta+1}}\cdot\frac{\beta Z''(\delta(t))\delta'(t)}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\beta}}Z''(t)^{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

由引理 2 得

$$[r(t)Z''(t)^{\alpha}]'=r'(t)Z''(t)^{\alpha}+\alpha r(t)(Z''(t))^{\alpha-1}Z'''(t)\le0$$

又由引理 1 及(H_3)可得$Z'''(t)\le 0$，所以$Z''(t)$单调递减，存在充分大的$T_2>t_2$，使得

$$\frac{Z''(\delta(t))}{(Z''(t))}\ge 1,$$

$$\frac{Z''(t)}{(Z''(t))^{\frac{\beta}{\alpha}}}=(Z''(t))^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\ge (Z'(T_2))^{1-\frac{\beta}{\alpha}},\ t>T_2,$$

记$m_2=\min\{1,(Z''(T_2))^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\}$，则

$$-\beta\rho(t)\frac{r(t)(Z'(t)^{\alpha}Z'(\delta(t))\delta'(t)}{Z^{\beta+1}(\delta(t))}\le -\frac{\beta\delta'(t)m_2}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\beta}}}\varpi^{\frac{\beta+1}{\beta}}.$$

从而

$$\varpi'(t)\le -\rho(t)Q_1(t)(\gamma\delta(t))^{\beta}+Q_2(t)\varpi(t)-\frac{\beta\delta'(t)m_2}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\beta}}}\varpi^{\frac{\beta+1}{\beta}} \tag{6}$$

现记$T=\max\{T_1,T_2\}$，$\lambda=\min\{\alpha,\beta\}$，$m=\begin{cases}m_1, & \beta>\alpha>0,\\ m_2, & \alpha\ge\beta>0.\end{cases}$ 则由（5）式、（6）式可得（4）式成立，所求得证。

2 主要结果

定理 1 假设条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式成立，如果

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t[\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}-(\frac{Q_2(s)}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{(m\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=+\infty \tag{7}$$

则方程（1）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

证明 $Z(t)$满足情形（I）时，假设$x(t)$是方程（1）的非振动解，由于$x(t)=0$无实际意义，仅考虑$x(t)\ne 0$的情形，不失一般性，设$x(t)$是方程（1）的最终正解，由引理 6 可得

$$\varpi'(t)\le -\rho(t)Q_1(t)(\gamma\delta(t))^{\beta}+Q_2(t)\varpi(t)-\frac{\lambda\delta'(t)m}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\lambda}}}\varpi^{\frac{\lambda+1}{\lambda}},\quad t>T$$

利用引理 2 得到

$$\varpi'(t)\le -\rho(t)Q_1(t)(\gamma\delta(t))^{\beta}+(\frac{Q_2(t)}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(t)r(t)}{(m\delta'(t))^{\lambda}}$$

对方程从T到t积分可得

$$\varpi(t)\le\varpi(T)-\int_T^t[\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(t))^{\beta}-(\frac{Q_2(s)}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{(m\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s$$

令$t\to\infty$，可得$\varpi(t)\to-\infty$，这矛盾于$\varpi(t)>0$，所以当$Z(t)$满足情形（I）时，$x(t)$为方程（1）的振动解。

$Z(t)$满足情形（II）时，由于（3）式成立，根据引理 5，可得$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。由此，定理 1 得证。

假定$\rho(t)=\delta(t)$，则定理 1 可得以下推论：

推论 1 假设条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式成立，如果

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t[\delta(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}-(\frac{Q_2(s)}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\delta(s)r(s)}{(m\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=+\infty$$

则方程（1）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

下面利用 philos 型积分平均条件，给出方程（1）两个新的振动准则。为此令

$D_0=\{(t,s):t>s\ge t_0\}$，$D=\{(t,s):t\ge s\ge t_0\}$

我们称函数$H(t,s)\in C^1(D,R)$为属于F类，记作$H(t,s)\in F$，如果满足

(I) $H(t,t)=0$，$t\ge t_0$ $H(t,t)>0$；

(II)存在$\rho(t)\in C^1([t_0,\infty),R^+)$，$h\in C(D_0,R)$，使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}+Q_2(s)H(t,s)=-h(t,s)H^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}(t,s) \tag{8}$$

定理 2 假设条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式成立，如果

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t[H(t,s)\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}-(\frac{|h(t,s)|}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{m^{\lambda}(\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=+\infty \tag{9}$$

则方程（1）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

证明 $Z(t)$满足情形（I）时，假设$x(t)$是方程（1）的非振动解，由于$x(t)=0$无实际意义，仅考

虑$x(t)\neq 0$的情形，不失一般性，设$x(t)$是方程（1）的最终正解。对（4）式两边同乘以 $H(t,s)$，并从T到t ($t>T$) 同时积分得

$$\int_T^t [H(t,s)\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}\mathrm{d}s \le \int_T^t H(t,s)[-\varpi'(s)+Q_2(s)\varpi(s)- \frac{\lambda\delta'(s)m}{(\rho(s)r(s))^{\frac{1}{\lambda}}}\varpi^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}]\mathrm{d}s \le H(t,T)\varpi(T)+$$

$$\int_T^t [|h(t,s)|\varpi(s)H^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}-H(t,s)\frac{\lambda\delta'(t)m}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\lambda}}}\varpi^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}]\mathrm{d}s \le$$

$$H(t,T)\varpi(T)+\int_T^t [(\frac{|h(t,s)|}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{m^{\lambda}(\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s \tag{10}$$

整理可得

$$\varpi(T)\ge\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t [H(t,s)\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}- (\frac{|h(t,s)|}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{m^{\lambda}(\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s \tag{11}$$

这与（9）式矛盾，所以当$Z(t)$满足情形（I）时，$x(t)$为方程（1）的振动解。

$Z(t)$满足情形（II）时，由于（3）式成立，根据引理 5，可得$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。由此，定理 2 得证。

若取$H(t,s)=(t-s)^n$，则定理 2 可简化为 Kamenev 型振动结果如下：

推论 2 假设条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式成立，如果

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{t^n}\int_T^t [(t-s)^n\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}- (\frac{|h(t,s)|}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{m^{\lambda}(\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=+\infty$$

则方程（1）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

若$H(t,s)=(\ln\frac{t}{s})^n$，则定理 2 可简化为：

推论 3 假设条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式成立，如果

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{(\ln t-\ln T)^n}\int_T^t [\ln t-\ln s)^n\rho(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}- (\frac{|h(t,s)|}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{m^{\lambda}(\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=+\infty$$

则方程（1）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

3 例子

例 1 在方程（1）中，取$\beta=5,\alpha=3$，$r(t)=t$，$q(t)=t^{-2}$，$\delta(t)=t$，$\tau(t)=t-1$，$p(t)=\frac{1}{2}$，则可得以下方程

$$[t\left|x''(t)+\frac{1}{2}x''(t-1)\right|^2(x''(t)+\frac{1}{2}x''(t-1)]'+ \frac{1}{t^2}\cdot x^5(t)=0,t>T>0 \tag{12}$$

容易验证，方程(12)满足

$$\int_{t_0}^{+\infty}r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{+\infty}s^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}s=+\infty,\text{且}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty}\int_v^{+\infty}(\frac{1}{r(u)}\int_u^{+\infty}q(\xi)\mathrm{d}\xi)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=+\infty$$

所以条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式均成立。

取$\rho(t)=t^2$，则$Q_1(t)=\frac{1}{32t^2}$，$Q_2(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}=\frac{2}{t}$，$\lambda=\min\{\alpha,\beta\}=3$，$m=m_1=\min\{1,Z^{\frac{1}{2}}(T_1)\}$为正常数，可得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int_T^t [\delta(s)Q_1(s)(\gamma\delta(s))^{\beta}- (\frac{Q_2(s)}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\delta(s)r(s)}{(m\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int_T^t [\frac{\gamma^5}{32}s^4-\frac{1}{16m}s^{-2}]\mathrm{d}s=+\infty$$

所以由定理 1，方程（12）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

注 1 由于方程（12）为三阶方程，利用文献**[8]**的相关结论无法得到方程（12）的振动性质。

例 2 在方程（1）中，取$\beta=5,\alpha=3$，$r(t)=t^2$，$q(t)=\frac{1}{t^4}$，$\delta(t)=t$，$\tau(t)=t-2$，$p(t)=\frac{1}{2}$，则可得以下方程

$$[t^2\left|x''(t)+\frac{1}{2}x''(t-2)\right|^2(x''(t)+\frac{1}{2}x''(t-2)]'+\frac{1}{t^4}\cdot x^5(t)=0,\quad t>T>0 \tag{13}$$

容易验证，方程（13）满足

$\int_{t_0}^{+\infty} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\ \mathrm{d}s=\int_{t_0}^{+\infty} s^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}s=+\infty$, 且

$$\int_{t_1}^{+\infty}\int_{v}^{+\infty}(\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{+\infty}q(\xi)\mathrm{d}\xi)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{9}{2}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}|_{t_1}^{+\infty}=+\infty$$

所以条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_5)$及（3）式均成立。

取$\rho(t)=1$，$H(t,s)=(t-s)^2$，则

$Q_1(t)=q(t)[(1-p(\delta(t)))]^{\beta}=\frac{1}{32t^4}, Q_2(t)=0$，

$h(t,s)=\frac{2}{t-s}$，$\lambda=\min\{\alpha,\beta\}=3$，

$m=m_1=\min\{1,Z^{\frac{1}{2}}(T_1\}$为正常数，故可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{H(t\ ,\ T)}\int_T^t[H(t,s)\rho(s)Q_1(s)(\gamma s)^{\beta}-(\frac{|h(t,s)|}{\lambda+1})^{\lambda+1}\frac{\rho(s)r(s)}{m^{\lambda}(\delta'(s))^{\lambda}}]\mathrm{d}s=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{(t\ -T)^2}\int_T^t\frac{\gamma^5}{32}[(t-s)^2s-\frac{16}{m^3}\cdot\frac{s^2}{(t-s)^4}]\mathrm{d}s=+\infty$$

所以由定理 2，方程（12）的解$x(t)$或者振动，或者$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。

注 2　显然例 2 的结论无法由文献[8]的相关结论得到。

参考文献：

[1] Philos C G. On a Kamenev's integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order[J]. Utilitas Math, 1983, 24: 277-289.

[2] Yan J. Oscillation theorems for second order linear differential equations wih damping[J]. Proceedings of the American mathematical society,1986,98(2):276-282.

[3] Yuan G S, Fan W M. Note on the paper of Dzurina and stavroulakis[J]. Applied Mathematics and computation,2006,174(2):1634-1641.

[4] Liu L H, Bai Y C. new oscillation criteria for second order nonlinear neutral delay differential equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2009, 231 (2):657-663.

[5] Li T X, Han Z L, Zhang C H, et al. On the oscillation of Second-order Emden Fowler neutral differential equations[J]. Journal of Applied Mathematics and computation,2011,37(1-2):601-610.

[6] Chen D X, Qu P X, Oscillation of even order advanced type dynamic equations with mixed nonlinearities on time scales[J]. Journal of Applied Mathematics and computation,2014, 44(1):357-377.

[7] Zhang S Y, Wang Q R. Oscillation of second-order nonlinear neutral dynamic equations with distributed deviating arguments on time scales[J]. Advances in Difference Equations, 2015(1):1-11.

[8] Liu H D, Fan W M, Liu P C. Oscillation and asymptotic analysis on a new generalized Emden Fowler equation[J]. Applied Mathematics and computation, 2012,219(5):2739-2748.

[9] Džurina J, Baculíková B. Oscillation of third-order quasi-linear advanced differential equations[J]. Differ.equ.appl,2012,4(3):411-421.

[10] 李同兴,韩振来,张承慧,等. 时间尺度上三阶 Emden-Fowler 时滞微分方程的振动准则[J]. 数学物理学报,2012,32(1):222-232.

[11] 曾云辉,俞元洪. 三阶半线性时滞微分方程的振动定理[J]. 系统科学与数学,2014,34(2)：231-237.

[12] Qin G, Huang C, Xie Y, et al. Asymptotic behavior for third-order quasi-linear differential equations[J]. Advances in Difference Equations,2013,2013(1):1-8.

[13] Baculíková B, Džurina J. Comparison theorems for higher-order neutral delay differential equations[J]. Journal of Applied Mathematics and computation,2015, 49(1-2):107-118.

[14] 仉志余,王晓霞,俞元洪. 三阶半线性中立型分布时滞微分方程的振动性[J]. 应用数学学报,2015,38(3): 450-459.