文章编号：1674-8085(2017)01-0001-07

一类含参广义向量拟均衡问题各种有效解映射的下半连续性

*孟旭东[1]，王三华[2]

（1. 南昌航空大学科技学院思政与基础教学部，江西，南昌 330034；

2. 南昌大学数学系，江西，南昌 330031）

摘　要：在赋范向量空间中，引进一类含参广义向量拟均衡问题，给出各种有效解的概念。在锥-次类凸的条件下，得到各种有效解的标量化结果。在适当假设条件下，得到含参广义向量拟均衡问题各种有效解映射的下半连续性。

关键词：有效解；解映射；下半连续性；含参广义向量拟均衡问题

中图分类号：O317　**文献标识码**：A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.01.001

RESEARCH ON THE LOWER SEMICONTIONUITY OF VARIOUS EFFICIENT SOLUTION MAPPINGS TO A CLASS OF PARAMETRIC GENERALIZED VECTOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS

* MENG Xu-dong[1], WANG San-hua[2]

(1. Department of Basic Courses, Science College of Nanchang Hang Kong University,Nanchang, Jiangxi 330034, China;

2. Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang, Jiangxi 330031,China)

Abstract: The concepts of various efficient solutions to a class of parametric generalized vector quasi-equilibrium problems in normed vector spaces are introduced. Under the condition of cone-subconvexlike, scalar characterizations of various efficient solutions are given. Combining with some suitable assumptions, the lower semicontionuity of various efficient solution mappings to the parametric generalized vector quasi-equilibrium problems are gained.

Key words: efficient solution; solution mapping; lower semicontionuity; parametric generalized vector quasi-equilibrium problems

众所周知，向量均衡问题是一类重要的数学模型，更是运筹学研究的热点问题，它主要包含向量优化、向量变分不等式、向量 Nash 平衡以及向量补问题。目前，诸多学者已讨论了各种类型向量均衡问题解的存在性，见文献[1-3]。解的稳定性分析同样是向量均衡理论研究的重要课题。近年来，越来越多的学者开始研究向量均衡问题解的稳定性分析，特别是解映射的下半连续性，见文献[4-13]。Huang 和 Thompson[4]分析了含参隐向量均衡问题解集映射的上半连续性和下半连续性。借助于稠密性结果和标量化技巧，Gong 和 Yao[5]第一次研究了含参向量均衡问题有效解集映射的下半连续性。Chen，Li 和 Teo[6]运用一种新方法讨论了解集是集值映射情形的含参广义向量均衡问题的下半连续性。Chen 和 Gong[7]在拓扑向量空间中，运用含参集值弱向量均衡问题解集的标量化结果给出了含

收稿日期：2016-09-19；修改日期：2016-10-12
基金项目：国家自然科学基金项目（11201216）
作者简介：*孟旭东(1982-)，男，江西南昌人，讲师，硕士，主要从事向量优化研究(E-mail:xudongm@163.com);
王三华(1978-)，男，江西南昌人，副教授，博士，主要从事向量优化研究(E-mail:wsh_315@163.com).

参集值弱向量均衡问题解集映射连续性的充分性条件。Chen 和 Li[8] 在实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中，在没有一致紧性假设条件下，得到了含参弱向量均衡问题解集映射、含参向量均衡问题解集映射和各种真有效解集映射的连续性，改进了文献[5]的相应结果。Peng 和 Chang[9]运用标量化的方法分析了含参广义系统弱有效解映射和全局有效解映射的下半连续性。Rabian，Panatda 和 Pakkapon[10]在没有单调和紧性的条件下，运用标量化的技巧，在锥凹及一致连续的基本假设条件下，给出了含参广义向量均衡问题近似解映射的下半连续。Han 和 Gong[11]在没有单调和紧性的条件下，运用一种新方法研究了含参广义强向量均衡问题有效解映射的下半连续。Peng，Lin，Yu 和 Wang[12]，运用标量化方法，在新假设条件下，给出了含参广义向量均衡问题弱有效解映射与强有效解映射的下半连续性。Li，Liu，Zhang 和 Fang[13]，在实 Hausdorff 拓扑向量空间中，借助标量化技巧，证明了含参广义强向量均衡问题有效解映射的下半连续性。

受文献[12-13]思想的启发，在赋范向量空间中，引进一类含参广义向量拟均衡问题，给出各种有效解的概念。在锥-次类凸的条件下，得到各种有效解的标量化结果。在适当假设条件下，得到含参广义向量拟均衡问题各种有效解映射的下半连续性。

1 预备知识

本文通篇设 X,Y,Z,W 为赋范向量空间。Y^* 为 Y 的拓扑对偶空间，C 是 Y 中的闭凸点锥且 $\operatorname{int}C\neq\varnothing$，其中 $\operatorname{int}C$ 表示 C 的拓扑内部。记 C 的共轭锥为 C^*，即

$$C^*:=\left\{f\in Y^*: f(y)\geq 0,\forall y\in C\right\}。$$

记 C^* 的拟内部为 $C^\#$，即

$$C^\#:=\left\{f\in Y^*: f(y)>0,\forall y\in C\setminus\{0\}\right\}。$$

设 D 是 Y 的非空子集，D 的闭包记为 $\mathrm{cl}(D)$，且 D 的锥包定义如下：

$$\operatorname{cone}(D)=\{td: t\geq 0, d\in D\}。$$

凸锥 C 的一个非空凸子集 B 称为 C 的一个基，假若 $C=\operatorname{cone}(B)$ 且 $0\notin \mathrm{cl}(B)$。显然，$C^\#\neq\varnothing$ 当且仅当 C 有一个基。据文献[14]，$\operatorname{int}C^*\subseteq C^\#$ 当且仅当 $\operatorname{int}C^*\neq\varnothing$。

设 B 为 C 的一个基，定义集合

$$C^\Delta=\left\{f\in C^\#:\inf\left\{f(b): b\in B\right\}>0\right\}，$$

据凸集分离定理知，$C^\Delta\neq\varnothing$，显然 $C^\Delta\subset C^\#$。

设 B_Y 为 Y 中的闭单位球，B 为 C 的一个基，则 $0\notin\mathrm{cl}(B)$。设 $\delta=\inf\left\{\|b\|: b\in B\right\}$，由 $0\notin\mathrm{cl}(B)$ 知，$\delta>0$。此 δ 始终用于本文剩下的部分。对任何的 $0<\varepsilon<\delta$，记 $C_\varepsilon(B)=\operatorname{cone}(B+\varepsilon B_Y)$，则 $\mathrm{cl}(C_\varepsilon(B))$ 为闭凸点锥，且 $C\setminus\{0\}\subset\operatorname{int}C_\varepsilon(B)$，$\forall 0<\varepsilon<\delta$。

设 $A\subset X$ 为非空子集，$F: A\times A\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ 为给定集值映射，考虑以下广义向量均衡问题，简称 GVEP。

找出 $x\in A$，使得

$$F(x,y)\bigcap(-K)=\varnothing,\forall y\in A，$$

其中 $K\bigcup\{0\}$ 为 Y 中的凸锥。

设 $\Lambda\subset Z,\Omega\subset W$ 为非空指标集，考虑以下含参广义向量拟均衡问题，简称 PGVQEP。对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，找出 $x\in A(x,\lambda)$，使得

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-K)=\varnothing,\forall y\in A(x,\lambda)。$$

其中 $A: X\times\Lambda\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$,

$$F: E\times E\times\Omega\subset X\times X\times Z\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$$

为给定集值映射。存在 $\lambda_0\in\Lambda$，满足 $A(x,\lambda_0)=A(x)$，且 $A(X\times\Lambda)=\bigcup\limits_{(x,\lambda)\in X\times\Lambda}A(x,\lambda)\subset E$。

对每个 $\lambda\in\Lambda$，记 $T(\lambda)=\{x\in X: x\in A(x,\lambda)\}$。

定义 1.1 对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，称 $x\in T(\lambda)$ 为 PGVQEP 的弱有效解，假若

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-\operatorname{int}C)=\varnothing,\forall y\in T(\lambda)$$

将 PGVQEP 的所有弱有效解的全体记为 $V_W(\lambda,\mu)$。

定义 1.2 对每个 $f\in C^*\setminus\{0\}$ 以及每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，记 $V_f(\lambda,\mu)$ 为 PGVQEP 的 f-有效解，即

$$V_f(\lambda,\mu)=\{x\in T(\lambda):\inf_{u\in F(x,y,\mu)}f(u)\geq 0,\forall y\in T(\lambda)\}。$$

定义 1.3 对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，称 $x\in T(\lambda)$ 为 PGVQEP 的全局有效解，假若存在点凸锥 $H\subset Y$，满足 $C\setminus\{0\}\subset\operatorname{int}H$，使得

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-H\setminus\{0\})=\varnothing,\forall y\in T(\lambda)$$

将 PGVQEP 的所有全局有效解的全体记为 $V_G(\lambda,\mu)$。

定义 1.4 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，称$x\in T(\lambda)$为 PGVQEP 的 Henig 有效解，假若存在$0<\varepsilon<\delta$，使得

$$\text{cone}(F(x,y,\mu))\bigcap(-\text{int}\,C_\varepsilon(B))=\varnothing,\forall y\in T(\lambda)$$

显然，$x\in T(\lambda)$为 PGVQEP 的 Henig 有效解当且仅当成立

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-\text{int}\,C_\varepsilon(B))=\varnothing,\forall y\in T(\lambda)$$

将 PGVQEP 的所有 Henig 有效解的全体记为 $V_H(\lambda,\mu)$。

定义 1.5 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，称$x\in T(\lambda)$为 PGVQEP 的超有效解，假若对零点的每一个邻域V，存在零点的邻域U，使得

$$\text{cone}(F(x,y,\mu))\bigcap(U-C)\subset V,\forall y\in T(\lambda)$$

将 PGVQEP 的所有超有效解的全体记为$V_S(\lambda,\mu)$。

注 1.1 PGVQEP 有以下三种特殊情况

（I）若$W=Z,\Lambda=\Omega,\lambda=\mu$，则 PGVQEP 为文献[12]所讨论的广义强向量均衡问题，即对每个$\mu\in\Lambda$，找出$x\in A(\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-C\setminus\{0\})=\varnothing,\forall y\in A(\mu)$$

其中 $A:\Lambda\to 2^X\setminus\{\varnothing\},F:E\times E\times\Lambda\subset X\times X\times Z\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$为给定集值映射，且$A(\Lambda)=\bigcup\limits_{\mu\in\Lambda}A(\mu)\subset E$。

（II）若$\Lambda=Z,\Omega=W$，则 PGVQEP 为文献[15]所讨论的一类广义向量均衡问题，即对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times W$，找出$x\in A(\lambda)$，使得

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-K)=\varnothing,\forall y\in A(\lambda)$$

其中$K\bigcup\{0\}$为 Y 中的凸锥，$A:\Lambda\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$，$F:X\times X\times W\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$为给定集值映射。

（III）若$W=Z=\Lambda=\Omega,\lambda=\mu$，则 PGVQEP 为文献[3]所讨论的广义强向量均衡问题，即对每个$\mu\in\Lambda$，找出$x\in A(\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)\notin -C\setminus\{0\},\forall y\in A(\mu)$$

其中 $A:\Lambda\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$ 为集值映射，$F:X\times X\times\Lambda\to Y$为给定向量值映射。

本文始终假设对每个$f\in C^*\setminus\{0\}$以及每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$V_f(\lambda,\mu)\neq\varnothing$。旨在通过标量化的方法，研究各种有效解映射的下半连续性。下面的论证中要引用以下定义和引理。

设$G:\Lambda\to 2^X$为给定集值映射，$\lambda_0\in\Lambda$给定。

定义 1.6[16]

（i）称G在点$\lambda_0\in\Lambda$处是下半连续的，如果对任何开集$V\subset X$，满足$G(\lambda_0)\bigcap V\neq\varnothing$，存在$\lambda_0$的邻域$U(\lambda_0)$，使得$G(\lambda)\bigcap V\neq\varnothing$，$\forall\lambda\in U(\lambda_0)$。

（ii）称G在点$\lambda_0\in\Lambda$处是上半连续的，如果对任何开集$V\subset X$，满足$G(\lambda_0)\subset V$，存在λ_0的邻域$U(\lambda_0)$，使得$G(\lambda)\subset V$，$\forall\lambda\in U(\lambda_0)$。

（iii）称G在点$\lambda_0\in\Lambda$处是闭的，如果对每个$(\lambda_n,x_n)\in\text{graph}(G):=\{(\lambda,x):\lambda\in\Lambda,\ x\in G(\lambda)\}$，满足$(\lambda_n,x_n)\to(\lambda_0,x_0)$，有$(\lambda_0,x_0)\in\text{graph}(G)$。

称G在Λ上为下半连续（上半连续）的，如果G在Λ上的每一点都是下半连续（上半连续）的。称G在Λ上为连续的，称G在Λ上既上半连续又下半连续。

定义 1.7[17-18]

（i）称G在Λ上称为$C-$类凸的当且仅当对每个$\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$以及每个$t\in[0,1]$，有

$$tG(\lambda_1)+(1-t)G(\lambda_2)\subset G(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)+C。$$

（ii）称G在Λ上称为$C-$次类凸的当且仅当假若存在$\theta\in\text{int}\,C$，对每个$\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$以及每个$t\in[0,1]$，及$\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon\theta+tG(\lambda_1)+(1-t)G(\lambda_2)\subset G(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)+C。$$

注 1.2 显然，若G在Λ上为$C-$类凸，则G在Λ上为$C-$次类凸。

引理 1.1[18]

（i）若G在Λ上为$C-$次类凸当且仅当$G(\Lambda)+\text{int}\,C$为凸集。

（ii）若G在Λ上$C-$次类凸，则$\text{clcone}(G(\Lambda)+C)$为凸集。

引理 1.2[16]

（i）G在点$\lambda_0\in\Lambda$处下半连续当且仅当对任何的序列$\{\lambda_n\}\subset\Lambda,\lambda_n\to\lambda_0$，以及任何的$x_0\in G(\lambda_0)$，存在$x_n\in G(\lambda_n)$，使得$x_n\to x_0$。

（ii）假若 G 为紧值的（即对每个 $\lambda\in\Lambda$，$G(\lambda)$ 为紧集），则 G 在点 $\lambda_0\in\Lambda$ 处上半连续当且仅当对任何的序列 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda,\lambda_n\to\lambda_0$，以及任何的 $x_n\in G(\lambda_n)$,存在 $x_0\in G(\lambda_0)$，及子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,使得 $x_{n_k}\to x_0$。

下面的引理在论证 PGVQEP 的各种有效解映射的下半连续性时起着重要作用。

引理 1.3[16] 设 I 为指标集，X,Y 为拓扑空间，$\Gamma_i:X\to 2^Y,(i\in I)$ 为给定集值映射，集族 $\Gamma=\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ 下半连续当且仅当对每个 $i\in I$，Γ_i 皆下半连续。

2 下半连续性

类似于文献[19]中引理 2.2 的证明，结合引理 1.1，易知 PGVQEP 的各种有效解集的标量化结果。对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，记 $F(x,T(\lambda),\mu)=\bigcup_{y\in T(\lambda)}F(x,y,\mu)$。

引理 2.1 设 B 为 C 的基,对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$ 以及每个 $x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$ 在 $T(\lambda)$ 上 $C-$ 次类凸，则

（i）$V_G(\lambda,\mu)=\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)$；

（ii）$V_H(\lambda,\mu)=\bigcup_{f\in C^\Delta}V_f(\lambda,\mu)$；

若 $\operatorname{int}C\neq\varnothing$，则

（iii）$V_W(\lambda,\mu)=\bigcup_{f\in C^*\setminus\{0\}}V_f(\lambda,\mu)$；

若设 B 为 C 的有界基，则

（iv）$V_S(\lambda,\mu)=\bigcup_{f\in\operatorname{int}C^*}V_f(\lambda,\mu)$，其中 $\operatorname{int}C^*$ 为 C^* 在 Y^* 中关于 $\beta(Y^*,Y)$ 的拓扑内部。

证明：先证 $\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)\subset V_G(\lambda,\mu)$。

事实上，对任何的 $x\in\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)$，则存在 $f_0\in C^\#$，使得 $x\in V_{f_0}(\lambda,\mu)$。于是，$x\in T(\lambda)$，对任何的 $y\in T(\lambda)$，存在 $z\in F(x,y,\mu)$，使得 $f_0(z)\geq 0$。

设 $D=\{u\in C:f_0(u)=1\},U=\{u\in Y:|f_0(u)|<\frac{1}{2}\}$，则 $D+U=\{u\in Y:f_0(u)\geq\frac{1}{2}\}$ 为凸集且 $0\notin\operatorname{cl}(D+U)$。

设 $C_U(D)=\operatorname{cone}(D+U)$，则 $C_U(D)$ 为点凸锥，且 $C\setminus\{0\}\subset\operatorname{int}C_U(D)$。于是，

$$F(x,y,\mu)\bigcap(-C_U(D)\setminus\{0\})=\varnothing,\forall y\in T(\lambda)$$

据定义知，$x\in V_G(\lambda,\mu)$。再由 x 的任意性知，

$$\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)\subset V_G(\lambda,\mu)\tag{1}$$

另一方面，证 $V_G(\lambda,\mu)\subset\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)$。

事实上，对任何的 $x\in V_G(\lambda,\mu)$，则存在点凸锥 H，满足 $C\setminus\{0\}\subset\operatorname{int}H$，使得

$$F(x,T(\lambda),\mu)\bigcap(-H\setminus\{0\})=\varnothing$$

则

$$\operatorname{clcone}(F(x,T(\lambda),\mu)+C)\bigcap(-H\setminus\{0\})=\varnothing。$$

由 $F(x,\cdot,\mu)$ 在 $T(\lambda)$ 上 $C-$ 次类凸，据引理 1.1 知，$\operatorname{clcone}(F(x,T(\lambda),\mu)+C)$ 为凸集。据凸集分离定理知,存在连续线性泛函 $f\in Y^*\setminus\{0\}$ 以及实数 r，使得

$$\begin{aligned}&f(h)\leq r\leq f(z),\forall h\in-\operatorname{int}H,\\&\forall z\in\operatorname{clcone}(F(x,T(\lambda),\mu)+C)\end{aligned}\tag{2}$$

由 H 为锥，知 $f(h)\leq 0,\forall h\in-\operatorname{int}H$。因此，$f(h)\geq 0,\forall h\in H$，则 $f\in H^*$。据式（2），结合 f 的连续性知，$f(z)\geq 0,\forall z\in F(x,T(\lambda),\mu)$。因此，有 $\inf_{z\in F(x,y,\mu)}f(z)\geq 0,\forall y\in T(\lambda)$。

由 $C\setminus\{0\}\subset\operatorname{int}H$，对任何 $x\in C\setminus\{0\}$，有 $f(x)>0$，则 $f\in C^\#$。

再由 x 的任意性知，$x\in\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)$，所以

$$V_G(F,\mu)\subset\bigcup_{f\in C^\#}V_f(F,\mu)\tag{3}$$

据式（1）与式（3）知，

$$V_G(\lambda,\mu)=\bigcup_{f\in C^\#}V_f(\lambda,\mu)$$

类似（i），易证（ii）、（iii）、（iv）成立。

记 $B(y_0,\delta)$ 为 Y 中以 $y_0\in Y$ 为中心，以 $\delta>0$ 为半径的开球。为讨论 PGVQEP 各种有效解映射在 $\Lambda\times\Omega$ 上的下半连续性，首先证明 $V_f(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda\times\Omega$ 上

的下半连续性。

引理 2.2 设 $f \in C^* \setminus \{0\}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$ 在 Λ 上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $E \times E \times \Omega$ 上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个 $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Omega$，$x \in T(\lambda) \setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在 $y \in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|) \subset -C$$

则 $V_f(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda \times \Omega$ 上下半连续。

证明： 假若存在 $(\lambda_0,\mu_0) \in \Lambda \times \Omega$，使 $V_f(\cdot,\cdot)$ 在 (λ_0,μ_0) 处不是下半连续的。于是存在序列 $\{(\lambda_n,\mu_n)\} \subset \Lambda \times \Omega$，$(\lambda_n,\mu_n) \to (\lambda_0,\mu_0)$ 且 $x_0 \in V_f(\lambda_0,\mu_0)$，故对任意的 $x_n \in V_f(\lambda_n,\mu_n)$，有 $x_n \not\to x_0$。

由 $x_0 \in V_f(\lambda_0,\mu_0)$，知 $x_0 \in T(\lambda_0)$。由 $T(\cdot)$ 在 Λ 上下半连续，据引理 1.2（i）知存在序列 $\hat{x}_n \in T(\lambda_n)$，使得 $\hat{x}_n \to x_0$。显然，$\hat{x}_n \in x \in T(\lambda_n) \setminus V_f(\lambda_n,\mu_n)$，据（iii）知，存在 $y_n \in V_f(\lambda_n,\mu_n)$，使得

$$F(\hat{x}_n,y_n,\mu_n)+F(y_n,\hat{x}_n,\mu_n)+B(0,\|\hat{x}_n-y_n\|) \subset -C \tag{4}$$

由 $y_n \in V_f(\lambda_n,\mu_n)$ 及 $T(\cdot)$ 在 λ_0 处上半连续且具紧值，据引理 1.2（ii）知，存在 $y_0 \in T(\lambda_0)$ 以及子列 $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$，使得 $y_{n_k} \to y_0$。特别地，由(4)得，

$$F(\hat{x}_{n_k},y_{n_k},\mu_{n_k})+F(y_{n_k},\hat{x}_{n_k},\mu_{n_k})+B(0,\|\hat{x}_{n_k}-y_{n_k}\|) \subset -C \tag{5}$$

由 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $E \times E \times \Omega$ 上下半连续知，对 $(\hat{x}_{n_k},y_{n_k},\mu_{n_k}) \to (x_0,y_0,\mu_0)$，$(y_{n_k},\hat{x}_{n_k},\mu_{n_k}) \to (y_0,x_0,\mu_0)$ 及任何 $z_{x_0} \in F(x_0,y_0,\mu_0)$ 与 $z_{y_0} \in F(y_0,x_0,\mu_0)$，存在 $z_{\hat{x}_{n_k}} \in F(\hat{x}_{n_k},y_{n_k},\mu_{n_k}), z_{y_{n_k}} \in F(y_{n_k},\hat{x}_{n_k},\mu_{n_k})$，使得 $z_{\hat{x}_{n_k}} \to z_{x_0}$, $z_{y_{n_k}} \to z_{y_0}$。

注意到 $y_{n_k} \in V_f(\lambda_{n_k},\mu_{n_k})$, $x_0 \in V_f(\lambda_0,\mu_0)$，有 $\inf\limits_{v \in F(y_{n_k},\hat{x}_{n_k},\mu_{n_k})} f(v) \geq 0$，且 $\inf\limits_{v \in F(x_0,y_0,\mu_0)} f(v) \geq 0$。特别地，

$$f(z_{y_{n_k}}) \geq 0 \text{ 且 } f(z_{x_0}) \geq 0 \tag{6}$$

在式（6）中，令 $n_k \to +\infty$，注意到 f 的连续性，有

$$f(z_{y_0}) \geq 0 \tag{7}$$

据式（6）、式（7）及 f 的线性性质得，

$$f(z_{x_0}+z_{y_0}) = f(z_{x_0})+f(z_{y_0}) \geq 0 \tag{8}$$

再由式（5）知，

$$z_{\hat{x}_{n_k}}+z_{y_{n_k}}+B(0,\|\hat{x}_{n_k}-y_{n_k}\|) \subset -C \tag{9}$$

在式（9）中，令 $n_k \to +\infty$，注意到 C 的闭性，有

$$z_{x_0}+z_{y_0}+B(0,\|x_0-y_0\|) \subset -C \tag{10}$$

假设 $y_0 \neq x_0$，由（10）知，$z_{x_0}+z_{y_0} \in -\operatorname{int} C$，再据 $f \in C^* \setminus \{0\}$，得 $f(z_{x_0}+z_{y_0}) < 0$，这与式（8）矛盾。故 $y_0 = x_0$，这与已知条件矛盾，则 $V_f(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda \times \Omega$ 上下半连续。

定理 2.1 设 $f \in C^* \setminus \{0\}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$ 在 Λ 上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $E \times E \times \Omega$ 上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个 $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Omega$，$x \in T(\lambda) \setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在 $y \in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|) \subset -C$$

(iv) 对每个 $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Omega$，及每个 $x \in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$ 在 $T(\lambda)$ 上 $C-$ 次类凸。

则 $V_W(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda \times \Omega$ 上下半连续。

证明： 对每个 $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Omega$ 以及每个 $x \in T(\lambda)$，由 $F(x,\cdot,\mu)$ 在 $T(\lambda)$ 上 $C-$ 次类凸。据引理 2.1（iii）知，

$$V_W(\lambda,\mu) = \bigcup_{f \in C^* \setminus \{0\}} V_f(\lambda,\mu)。$$

据引理 2.2 知，对每个 $f \in C^* \setminus \{0\}$，$V_f(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda \times \Omega$ 上下半连续。再由引理 1.3 知，$V_W(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda \times \Omega$ 上下半连续。

由定理 2.1，结合注 1.2，可知

推论 2.1 设 $f \in C^* \setminus \{0\}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$ 在 Λ 上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $E \times E \times \Omega$ 上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个 $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Omega$，$x \in T(\lambda) \setminus V_f(\lambda,\mu)$，

存在$y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

（iv）对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$类凸。

则$V_W(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

证明： 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$以及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上为$C-$类凸，由注 1.2 知，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$次类凸。由定理 2.1 知，$V_W(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

由引理 1.3、引理 2.1（i）与引理 2.2，类似定理 2.1 的论证方法，可得 PGVQEP 的全局有效解映射的下半连续性。

定理 2.2 设$f\in C^{\#}$，假设以下条件成立：

（i）$T(\cdot)$在Λ上连续且具非空紧值；

（ii）$F(\cdot,\cdot,\cdot)$在$E\times E\times\Omega$上下半连续且具非空紧值；

(iii)对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$x\in T(\lambda)\setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在$y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

(iv)对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$次类凸。

则$V_G(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

由定理 2.2，结合注 1.2，可知

推论 2.2 设$f\in C^{\#}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$在Λ上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$在$E\times E\times\Omega$上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$x\in T(\lambda)\setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在$y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

(iv) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$类凸。

则$V_G(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

由引理 1.3、引理 2.1（ii）与引理 2.2，类似定理 2.1 的论证方法，可得 PGVQEP 的 Henig 有效解映射的下半连续性。

定理 2.3 设$f\in C^{\Delta}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$在Λ上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$在$E\times E\times\Omega$上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$x\in T(\lambda)\setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在$y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

(iv) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$次类凸。

则$V_H(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

由定理 2.3，结合注 1.2，可知

推论 2.3 设$f\in C^{\Delta}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$在Λ上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$在$E\times E\times\Omega$上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$x\in T(\lambda)\setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在$y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

(iv) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$类凸。

则$V_H(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

由引理 1.3、引理 2.1（iv）与引理 2.2，类似定理 2.1 的论证方法，可得 PGVQEP 的正真有效解映射的下半连续性。

定理 2.4 设$f\in \operatorname{int}C^{*}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$在Λ上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$在$E\times E\times\Omega$上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$x\in T(\lambda)\setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在$y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

(iv) 对每个$(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个$x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$在$T(\lambda)$上$C-$次类凸。

则$V_S(\cdot,\cdot)$在$\Lambda\times\Omega$上下半连续。

由定理 2.4，结合注 1.2，可知

推论 2.4 设$f\in \operatorname{int}C^{*}$，假设以下条件成立：

(i) $T(\cdot)$在Λ上连续且具非空紧值；

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $E\times E\times\Omega$ 上下半连续且具非空紧值；

(iii) 对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，$x\in T(\lambda)\setminus V_f(\lambda,\mu)$，存在 $y\in V_f(\lambda,\mu)$，使得

$$F(x,y,\mu)+F(y,x,\mu)+B(0,\|x-y\|)\subset -C$$

(iv) 对每个 $(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Omega$，及每个 $x\in T(\lambda)$，$F(x,\cdot,\mu)$ 在 $T(\lambda)$ 上 $C-$类凸。

则 $V_S(\cdot,\cdot)$ 在 $\Lambda\times\Omega$ 上下半连续。

参考文献：

[1] Fu J Y. Vector Equilibrium problems. Existence theorems and convexity of solution set[J]. Journal of Global Optimization, 2005, 31(1): 109-119.

[2] Song W. Vector equilibrium problems with set-valued mapping[A]. In:Giannessi F. Variational inequalities and vector equilibia[C]. Dordrecht, Netherlands Kluwer, 2000, 38(2):403-418.

[3] Ansari Q H,Oettli W, Schlaer D. Generalization of vector equilibria[J].Math Meth Oper Res.1997,46(2): 147-152.

[4] Huang N J, Li J, Thompson H B. Stability for parametric implicit vector equilibrium problems[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 43(11): 1267-1274.

[5] Gong X H, Yao J C. Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138(2): 197-205.

[6] Chen C R, Li S J, Teo K L. Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2009, 45(2): 309-318.

[7] Chen C R, Li S J, Teo K L. Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2009, 45(2): 309-318.

[8] Chen C R, Li S J. On the solution continuity of parametric generalized systems[J]. Pacific Journal of Optimization, 2010, 6(1): 141-151.

[9] Peng Z Y, Chang S S. On the lower semicontinuity of the set of efficient solutions to parametric generalized systems[J]. Optimization Letters, 2014, 8(1): 159-169.

[10] Rabian W,Panatda B,Pakkapon P. Lower semicontinuity of approximate solution mappings to parametric generalized vector equilibrium problems[J].Journal of Inequalities and Applications, 2014(1):1-9.

[11] Han Y, Gong X H. Lower semicontinuity of solution mapping to parametric generalized strong vector equilibrium problems[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 28: 38-41.

[12] Peng Z Y, Lin Z, Yu K Z, et al. A note on solution lower semicontinuity for parametric generalized vector equilibrium problems[J].Journal of Inequalities and Applications,2014(1):1-10.

[13] Li S J, Liu H M, Zhang Y, et al. Continuity of the solution mappings to parametric generalized strong vector equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2013, 55(3): 597-610.

[14] Johannes J. Vector optimization: theory, applications, and extensions[J]. 2010.

[15] Han Y, Huang N. Existence and stability of solutions for a class of generalized vector equilibrium problems[J]. Positivity, 2015: 1-18.

[16] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Viley, 1984.

[17] Göpfert A, Riahi H, Tammer C, et al. Variational methods in partially ordered spaces[M]. Springer Science & Business Media, 2006.

[18] Li Z F, Chen G Y. Lagrangian multipliers, saddle points, and duality in vector optimization of set-valued maps[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 215(2): 297-316.

[19] Gong X H. Efficiency and Henig efficiency for vector equilibrium problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 108(1): 139-154.