

文章编号: 1674-8085(2016)06-0015-05

球面上具有双曲几何对称性的图案自动化生成

范发明¹, 郑国山², *欧阳培昌¹

(1. 井冈山大学数理学院, 江西, 吉安 343009; 2. 安远县中等专业学校, 江西, 赣州 342100)

摘要: 利用动力系统和双曲反射群原理, 在单位圆盘生成双曲艺术图案, 然后经过保形映射, 把图案进一步映射到球面空间。该美观球面图案的自动化生成方法, 可用于生成无穷无尽的球面艺术图案。

关键词: 双曲几何; 保形映射; 对称群

中图分类号: TP391

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.06.005

AUTOMATIC GENERATION OF HYPERBOLIC PATTERNS ON THE SPHERICAL SPACE

FANG Fa-ming, ZHENG Guo-shan, *OUYANG Pei-chang

(1. School of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China;

2. Secondary Specialized School of Anyuan City, Ganzhou, Jiangxi 342100, China)

Abstract: Based on the dynamical system and hyperbolic reflection group theorem, we generate hyperbolic aesthetic patterns. Furthermore, we use conformal mapping to transform the obtained patterns in to spherical space. We also establish an automatic method to generate infinite spherical aesthetic patterns.

Key words: hyperbolic geometry; conformal mapping; symmetry group

1 概述

欧几里得的平行公理假定: 给定一条直线和直线外一点, 有且只有一条直线过该点平行于给定直线。历史上许多学者对这一公理持有争议, 这类争议持续了近两千年, 到十九世纪末, Gauss、Bolyai 和 Lobatchevsky 共同建立了一门与传统欧式几何风格迥异的新几何——双曲几何 (hyperbolic geometry)^[1]。双曲几何和欧氏几何的前四条公理完全一样, 只是第五平行公理的内容不同: 给定一条直线和直线外一点, 过该点, 有无穷条直线平行于给定直线。双曲几何的发现, 打破了欧氏几何的垄断地位, 解决了两千年来一直悬而未决的平行公理

问题, 引起几何与空间概念的深刻革命, 是20世纪相对论产生的前奏和准备^[2-4]。

双曲几何拥有非常优美的几何结构, 基于双曲几何对称性, 荷兰艺术家 Escher 在双曲空间创作了一系列令人叹为观止的圆极限 (Circle Limits I-IV) 艺术图案^[5-6]。他的作品, 反过来激发众多学者用计算机生成各类双曲艺术图案。Dunham 在 1981 年首先提出用计算机生成双曲图案的思想^[7], 此后二三十年间, 学界一直不断改进算法^[8-13], 目前人们甚至可以把欧氏空间的艺术图案完美嵌入到双曲几何空间^[14-15]。

与众多探讨各类双曲图案生成方法的研究论文不同, 本文介绍一种新颖的方法, 把双曲图案保

收稿日期: 2016-03-22; 修改日期: 2016-06-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461035); 江西省自然科学基金项目(20142BAB211012); 井冈山大学博士科研启动项目(JZB1303); 吉安市科技支撑项目(吉市科计字[2014]36号12)

作者简介: 范发明(1971-), 男, 江西吉安人, 讲师, 主要从事保形映射研究(E-mail: famingfan@163.com);

郑国山(1980-), 男, 江西赣州人, 中教一级, 主要从事计算机教学(E-mail: 32429773@qq.com);

*欧阳培昌(1980-), 男, 江西赣州人, 讲师, 博士, 主要从事计算机图形学研究(E-mail: g_fcayang@163.com)。

形地(conformally)^[16-17]映射到球面上,借助计算机技术,生成无穷无尽的美观球面图案。

2 单位圆盘到球面空间的保形映射 Π

双曲几何在三维空间有多种可以相互转化等价形式^[1],本文沿用最常见的庞加莱(Poincaré)模型和上半平面模型。

三维双曲空间庞加莱模型空间是一个单位球,即 $S = \{(a,b,c) \in R^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 < 1\}$ 。设 $H^3 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid z > 0\}$ 是上半平面空间。则球面空间与上半平面空间的变换关系 Π 为:

$$(a,b,c)^r = \Pi(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

对应地, Π 的逆映射 Π^{-1} 为:

$$(x,y,z)^r = \Pi^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{a^2 + b^2 + (1-c)^2} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 1 - a^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中, $(x,y,z) \in H^3$, $(a,b,c) \in S$ 。注意,上述定义的变换是保形的双射变换。该映射具有丰富的数学性质^[2-3],下面我们介绍本文需用到的单位圆盘到球面的映射 Π 。

设集合 D_1 , D_2 , S_+ , S_- 分别定义为:

$$D_1 = \{(x,y,0) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x,y,0) \in R^3 \mid x^2 + y^2 > 1\},$$

$$S_+ = \{(a,b,c) \in R^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1, c \geq 0\},$$

$$S_- = \{(a,b,c) \in R^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1, c < 0, c \neq -1\}。$$

则由映射(1)和(2),有以下结果。

定理 1 (I) $\Pi(S_+) = D_1$; (II) $\Pi(S_-) = D_2$ 。

证明:只证明(I),(II)类似可证。

先证 $\Pi(S_+) = D_1$ 。

设 $(a,b,c) \in S_+$, 即 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 且 $c > 0$,

则

$$\Pi(a,b,c) = \frac{1}{a^2 + b^2 + (c+1)^2} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ a^2 + b^2 + c^2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2) + 2c + 1} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{1 + 2c + 1} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

因 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 且 $c > 0$, 记 $x = \frac{a}{1+c}$,

$$y = \frac{b}{1+c}, \text{ 则 } x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{(c+1)^2} = \frac{c^2 - 1}{(c+1)^2} =$$

$$\frac{1-c}{1+c} \leq 1, \text{ 由此得到 } (x,y,0) = \Pi(a,b,c) \in D_1, \text{ 即}$$

证明了 $\Pi(S_+) \subseteq D_1$ 。

再证(II): $D_1 \subseteq \Pi(S_+)$, 注意到映射 Π 是双射,只需证明 $\Pi^{-1}(D_1) \subseteq S_+$ 即可。

设 $(x,y,0) \in D_1$, 其中 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则

$$\Pi^{-1}(x,y,0) = \frac{1}{x^2 + y^2 + (1-0)^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } a = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad b = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$c = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \geq 0, \text{ 则}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$\frac{4x^2 + 4y^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 1$$

如此,已证明了 $(a,b,c) \in S_+$ 。

综合上述,证明了 $\Pi(S_+) = D_1$ 。证毕。

定理 1 说明保形映射 Π ,把上半球面 S_+ 映射到单位圆盘 D_1 ,把下半球面映射到 D_2 ,即单位圆盘 D_1 之外。因此,定理 1 的几何意义告诉我们, Π 建立了单位球面和欧氏平面的一个保形的双射对应关系。

3 基于保形映射 Π 的球面双曲图案生成方法

二维的双曲几何可以优雅地表示在庞加莱圆

盘模型 $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 上^[1]。

在这个模型中, 单位圆盘 D 内的“点”是双曲空间的点, “直线”是所有包含在庞加莱圆盘内, 并于单位圆垂直相交的圆弧。可以证明, 过两“点”能确定一条“直线”, 而且, 过“直线”外的一点有不止一条“直线”和已知“直线”平

行(即不相交)^[2-3]。

利用双曲几何的反射变换, 在文献[18-20]中, 我们建立了基于动力系统和不变映射原理的双曲艺术图案生成方法。图 1 中展示的是两个双曲图案例子。

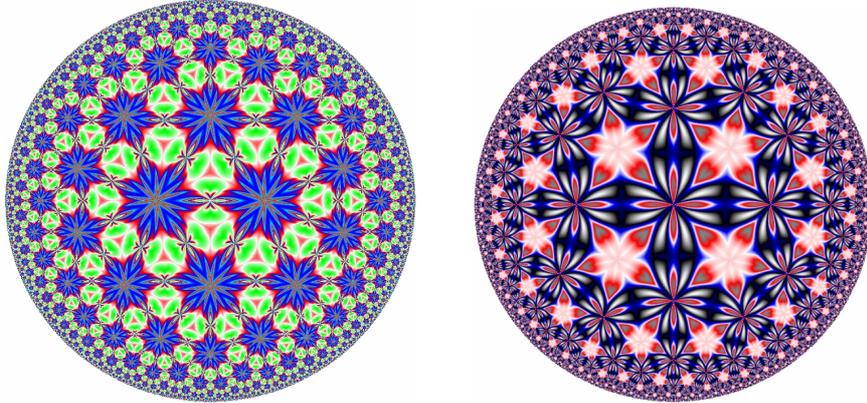


图 1 基于双曲反射群和动力系统原理生成的具有[2,7,3](左)和[4,2,5](右)对称性的双曲图案

Fig.1 Hyperbolic patterns with [2,7,3] (left) and [4,2,5] symmetry generated by hyperbolic reflection group and dynamical system theorem

由定理 1 中保形映射 Π 的几何意义, 可以把该图映射到球面上, 见图 2 中右图, 如此建立了双曲空间 D 和球面空间 $S^2 = \{(a, b, c) \in R^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ 的一个对应关系。图 2 展示的是 Π 把双曲空间 D 上具有[4,6,2]对称性的拼砌, 映射到球面空间 S^2 的结果。

在单位圆盘上生成双曲艺术图案; 其次, 然后用保形映射 Π , 把得到的圆盘图案映射到球面空间 S^2 的上半球; 最后, 把 S^2 的下半球点 (a, b, c) (其中 $c < 0$) 的颜色设置成上半球对应的极点 (pole point)^[20-21] $(-a, -b, -c)$, 完成整个球面图案绘制 (图 3-图 5 展示的是 6 幅按上述方法生成的球面艺术图案)。

下面说明球面上具有双曲对称群对称性艺术图案生成方法: 首先, 基于文献[18-20]中的方法,

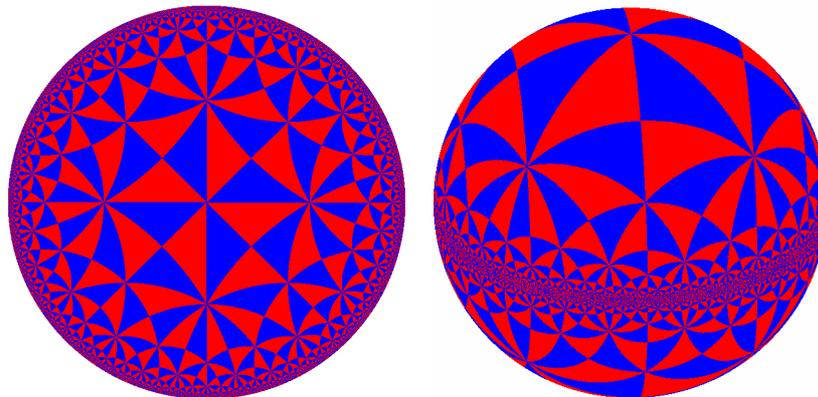


图 2 保形映射 Π 可把双曲圆盘 D 上的拼砌映射到球面空间 S^2 。左图: 具有[4,6,2]对称性的双曲拼砌。右图: 保形映射 Π 把左图映射到球面上的球面拼砌

Fig.1 Conformal mapping Π can map the hyperbolic tiling of D into spherical tiling of S^2 . Left: hyperbolic tiling with the [4,6,2] symmetry. Right: spherical tiling transformed from the left tiling

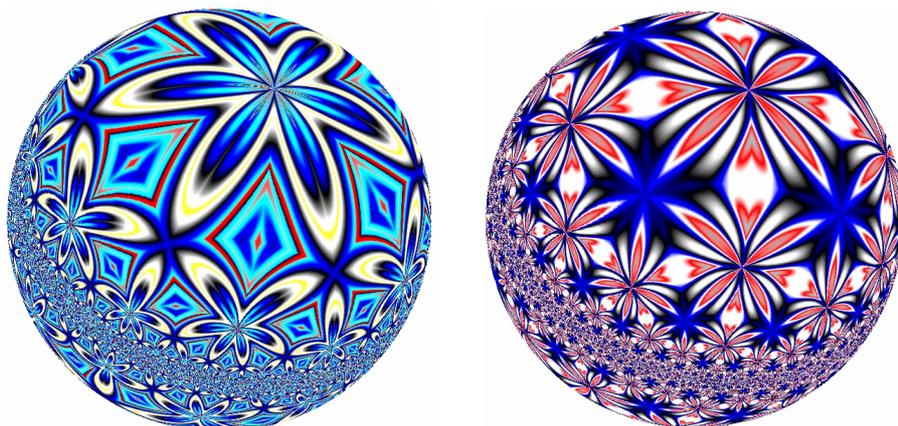


图3 具有 $[6,6,2]$ (左)和 $[4,5,2]$ (右)对称性的球面双曲艺术图案
Fig.3 Spherical aesthetic patterns with the $[6,6,2]$ (left)和 $[4,5,2]$ (right) symmetry

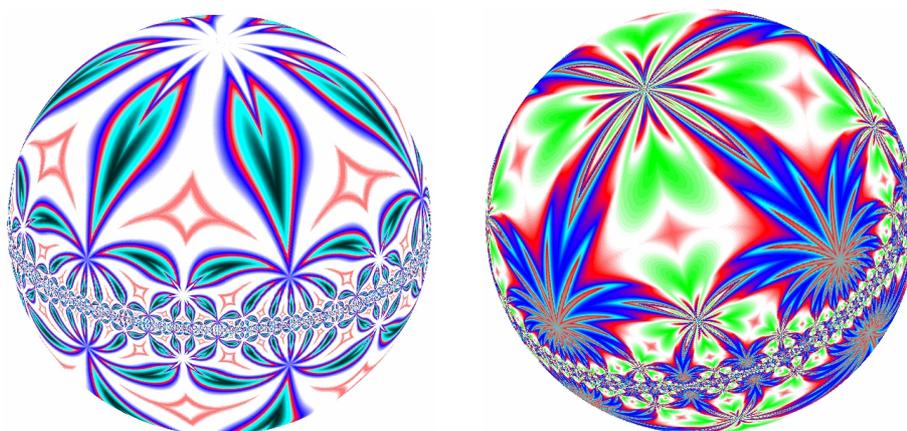


图4 具有 $[6,7,2]$ (左)和 $[4,17,2]$ (右)对称性的球面双曲艺术图案
Fig.4 Spherical aesthetic patterns with the $[6,7,2]$ (left)和 $[4,17,2]$ (right) symmetry

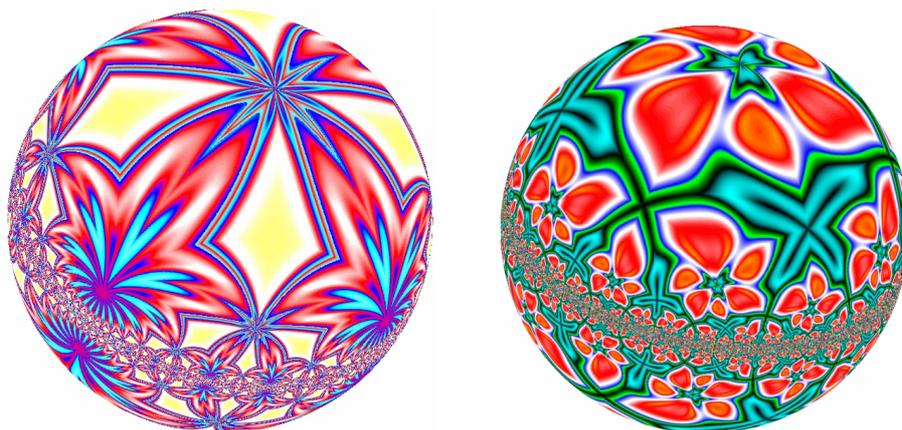


图5 具有 $[4,16,2]$ (左)和 $[3,4,6]$ (右)对称性的球面双曲艺术图案
Fig.5 Spherical aesthetic patterns with the $[4,16,2]$ (left)和 $[3,4,6]$ (right) symmetry

参考文献:

- [1] Coxeter H S M. Non-euclidean geometry[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 1998.
[2] Iversen B, Bruce J W. Hyperbolic geometry[M].

Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

- [3] Trudeau R J. The non-Euclidean revolution[M]. Boston:Birkhauser, 1987.
[4] Jens B, Franklin S. Hyperbolic geometry and

- applications in quantum[M]. Cambridge: Cambridge University Press,2012.
- [5] Escher MC. Escher on escher: exploring the infinity[M]. New York :Harry N. Abrams,. 1989,
- [6] Schattschneider D. MC Escher: visions of symmetry[M]. New York:Freeman, 1990.
- [7] Dunham D. Creating repeating hyperbolic patterns, ACM Siggraph Computer Graphics[J].1981, 15(5): 215-223.
- [8] Chung K W, Chan H S Y, Wang B N. Hyperbolic symmetries from dynamics[J]. Computers & Mathematics with applications, 1996, 31(2): 33-47.
- [9] Chung K W, Chan H S Y, Wang B N. Efficient generation of hyperbolic symmetries from dynamics[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2002, 13(6): 1175-1190.
- [10] Chung K W, Chan H S Y, Wang B N. Tessellations in three-dimensional hyperbolic space from dynamics and the quaternions[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2001, 12(7): 1181-1197.
- [11] Chen N, Li Z, Jin Y. Visual presentation of dynamic systems with hyperbolic planar symmetry[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40(2): 621-634.
- [12] Adcock B M, Jones K C, Reiter C A, et al. Iterated function systems with symmetry in the hyperbolic plane[J]. Computers & Graphics, 2000, 24(5): 791-796.
- [13] Chen N, Hao D, Tang M. Automatic generation of symmetric IFSs contracted in the hyperbolic plane[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 41(2): 829-842.
- [14] Leys J. Hyperbolic Escher[EB/OL]. http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=325.
- [15] Von Gagern M, Richter-Gebert J. Hyperbolization of euclidean ornaments[J]. Electronic Journal of Combinatorics, 2009, 16(2):1-29.
- [16] Schinzinger R, Laura P A A. Conformal mapping: methods and applications[M]. Dover:Courier Corporation, 2003.
- [17] Driscoll T A, Trefethen L N. Schwarz-Christoffel Mapping[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [18] Ouyang P, Cheng D, Cao Y, et al. The visualization of hyperbolic patterns from invariant mapping method[J]. Computers & Graphics, 2012, 36(2): 92-100.
- [19] Ouyang P, Chung K. Beautiful math, part 3: hyperbolic aesthetic patterns based on conformal mappings[J]. IEEE computer graphics and applications, 2014, 34(2): 72-79.
- [20] Ouyang P, Ding F, Wang X. Beautiful Math, Part 4: Polygonal Aesthetic Patterns Based on the Schwarz-Christoffel Mapping[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2015, 35(4): 22-25.
- [21] Meurant G. Noneuclidean tessellations and their groups[M]. Academic :Academic Press, 1974.
- [22] Beardon A F. The geometry of discrete group[M]. Springer:Springer Press, 1983.