文章编号：1674-8085(2016)06-0011-04

关于泰勒公式中间点函数的可微性

李　丹，*张树义

（渤海大学数理学院，辽宁，锦州 121013）

摘　要：利用比较函数概念,研究泰勒公式“中间点函数”的渐近性和可微性, 在一定条件下, 建立了泰勒公式“中间点函数” 在点 a 处的一阶可微性和渐近性。获得的结果推广和改进了有关文献中的新近结果。

关键词：比较函数；泰勒公式；中间点函数；可微性；渐近性

中图分类号：O177.91　**文献标识码：**A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.06.004

RESEARCH ON DIFFERENTIABLE BEHAVIOR OF INTERMEDIATE POINT FUNCTION FOR TAYLOR FORMULA

LI Dan, *ZHANG Shu-yi

(College of Mathematics and Physics, Bohai University,Jinzhou, Liaoling 121013, China)

Abstract: Based on the concept of comparison function, we study the differentiable behavior of the intermediate point function in Taylor formula. The asymptotic behavior and first order differentiable behavior at a point of the intermediate point function for Taylor formula are established under certain conditions. We obtain the results to improve and extend the recent results of some reference.

Key words: comparison function; Taylor mean value formula; intermediate point function; differentiable behavior; asymptotic behavior

1　引言与预备知识

泰勒公式　设 a 和 b 是实数且 $a<b$，$f:[a,b]\to R$。如果函数 f 满足 (i) 在 $[a,b]$ 上具有直至 $n-1$ 阶连续导数，(ii) 在 (a,b) 内存在 n 阶导数，则存在一点 $c\in(a,b)$，使

$$f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

下面我们指出泰勒公式“中间点” $c\in(a,b)$，不仅依赖区间端点，而且与 n 有关，当 n 取定以后，$c\in(a,b)$，仅依赖区间端点。而且泰勒公式“中间点”唯一的充分条件是：$f^{(n)}(x)$ 是单射。

设 I 是 R 上一区间，$a\in I$ 是 I 上一点，函数 $f:I\to R$，如果函数 f 在 I 上 n 次可微，则由泰勒公式，$\forall x\in I-\{a\}$，在以 a,x 为端点的开区间上，存在一点 c_x，使

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

如果 $f^{(n)}(x)$ 是单射的，则点 c_x 是唯一的，进而可以定义 $c:I-\{a\}\to I-\{a\}$ 为 $c(x)=c_x$，使得

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

收稿日期：2016-06-29；修改日期：2016-09-12
作者简介：李　丹(1992-)，女，辽宁锦州人，硕士生，主要从事非线性泛函分析研究(Email: xjlidan@126.com);
*张树义(1960-)，男，辽宁锦州人，教授，主要从事非线性泛函分析研究(E-mail:jzzhangshuyi@126.com).

如果$f^{(n)}(x)$不是单射的，则使(1)成立的点c_x，一般说来不是唯一的。如果对$\forall x\in I-\{a\}$，可在以a,x为端点的开区间上选取一个c_x，使(1)成立。那么就可以定义函数$c:I-\{a\}\to I-\{a\}$为$c(x)=c_x$，使(2)成立。

定理 1[1] 设I是R上一区间，$a\in I$是I上一点，函数$f:I\to R$。如果函数f在I上n次可微，则存在一函数$c:I-\{a\}\to I-\{a\}$，使得(2)成立。此外如果$f^{(n)}(x)$是单射的，则点$c(x)$是唯一的。

因为$\forall x\in I-\{a\}$，$|c(x)-a|\le|x-a|$，所以$\lim\limits_{x\to a}c(x)=a$。于是可定义“中间点函数”$\overline{c}_1:I\to I$为

$$\overline{c}_1(x)=\begin{cases}c(x),x\in I-\{a\},\\ a,\quad x=a.\end{cases}$$

显然$\overline{c}_1(x)$在点$x=a$连续。

另一方面 Azpeitja[2]研究了 Taylor 公式“中间点”的渐近性质。同时，Jacobson[3]建立积分中值定理的类似结果。在这之后，一些作者研究各种中值定理“中间点”的渐近性质，可参考文献[4-11]。文献[3]研究了 Cauchy 中值定理“中间点”的渐近性与可微性。最近，我们在文献[11]中研究了泰勒公式“中间点函数”的一阶可微性。本文的目的是利用比较函数概念，研究泰勒公式“中间点函数”在点a处的性质，获得的结果丰富了数学分析中值定理理论。

定义 1[5-6] 设$\psi(x)$定义在半开区间$(a,\ b]$ $(b>0)$上，$\varphi(x)$在半开区间$(a,\ b]$上存在$m(m\ge1)$阶导数且满足下列条件

(i) $\lim\limits_{x\to a^+}\left[(x-a)^m\cdot\varphi(x)\right]^{(i)}=0,\ i=0,1,2,\cdots,m-1$；

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^i\cdot\varphi^{(i)}(x)/\varphi(x)=\lambda_{\varphi_i}$，

λ_{φ_i}为常数，$i=0,1,2,\cdots,m$，$\lambda_{\varphi_0}=1$；

(iii) $C_k^{(\varphi)}\overset{def}{=}\sum\limits_{i=0}^{k}(k-i)\,!\left(C_k^i\right)^2\lambda_{\varphi_i}\ne0,\ k=1,2,\cdots,m$。

如果$\lim\limits_{x\to a^+}\psi(x)/\varphi(x)$存在非零极限，则称$\varphi(x)$是当$x\to a^+$时关于$\psi(x)$的比较函数并称此非零极限为比较值，简称比值。

例 1 在$(0,\ b](b>0)$上取$\varphi(x)=1/\sqrt{x}$，$\psi_1(x)=2+1/\sqrt{x}$，$\psi_2(x)=\left[\cos\left(\sqrt{x}+1\right)\right]/\sqrt{x}$，则容易验证$\varphi(x)$是当$x\to0^+$时关于$\psi_1(x)$和$\psi_2(x)$的比较函数。

引理 1[5-6] 设$x>0,\varphi(t)=x^{\alpha}$，$\alpha$为实数，$\alpha>-1$，$n\ge1$，$\Gamma(\cdot)$为 Gamma 函数, 则

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)\,!\left(C_n^i\right)^2\lambda_{\varphi_i}=\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(\alpha+1),$$

其中

$$\lambda_{\varphi_i}=\lim_{t\to0^+}t^i\cdot\varphi^{(i)}(t)/\varphi(t)=$$

$$\begin{cases}1, & i=0\\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1), & i=1,2,\cdots,\ n\end{cases}$$

容易证明下列引理成立。

引理 2 设I是R上一区间，$a\in I$是I的左端点。$H:I\to R$在I上n可微且在半开区间$(a,\ b]\subset I$上存在n阶导数的函数$\varphi(x)$是当$x\to a^+$时关于$H^{(n)}(x)-H^{(n)}(a)$的比较函数且比值为A和

$$\tilde{H}(x)=\begin{cases}\dfrac{H(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{H^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\dfrac{H^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n\varphi(x)}, & x\in I-\{a\},\\ \dfrac{A}{C_n^{(\varphi)}}, & x=a,\end{cases}$$

则下列结论成立：

(i) $\tilde{H}(x)$在I上连续且$\tilde{H}(a)=\dfrac{A}{C_n^{(\varphi)}}$；

(ii) 当$\varphi(x)\equiv x-a$时，

$$\tilde{H}(a)=\frac{A}{C_n^{(x-a)}}=\frac{H^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

(iii) $$H(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{H^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\left(\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}+\xi\right)(x-a)^n\varphi(x),$$

其中$\xi\to0\left(x\to a^+\right)$。

2 主要结果

定理 2 设 I 是 R 上一区间，$a\in I$ 是 I 的左端点，函数 $f:I\to R$ 满足下列条件：

(i) 函数 f 在 I 上有直至 n 阶导数，(ii) 在 I 上存在 n 阶导数的函数 $\varphi(x)$ 是当 $x\to a^+$ 时关于 $f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)$ 的比较函数且比值为 A，则下列结论成立：

1° 存在实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$，且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $\tilde f(x)\neq 0$，其中

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n\varphi(x)}, & x\in(a,a+\delta),\\ \dfrac{A}{C_n^{(\varphi)}}, & x=a.\end{cases}$$

2° 若再设 $\forall x\in(a,a+\delta),\left(f^{(n)}(x)\right)'$ 存在且非零，则对于任意 $x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n \tag{3}$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a},\quad x\in(a,a+\delta), \tag{4}$$

有下列性质：

a) 对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}\left(a+(x-a)\theta(x)\right)}{n!}(x-a)^n \tag{5}$$

b) 存在极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\varphi\left(a+(x-a)\theta(x)\right)}{\varphi(x)}=\dfrac{n!}{C_n^{(\varphi)}}$.

证明 1° 由定理条件和引理 2，有 $\lim\limits_{x\to a^+}\tilde f(x)=\dfrac{A}{C_n^{(\varphi)}}\neq 0,$ 因此存在一实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$ 且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $\tilde f(x)\neq 0$。

2° 因 $\left(f^{(n)}(x)\right)'\neq 0$，所以 $\forall x\in(a,a+\delta)$，$f^{(n)}(x)$ 严格单调，从而 $f^{(n)}(x)$ 是单射，因此存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使得(3)成立。

3° a) 由式(3)和式(4)即得证。

b) 由引理 2，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\left(\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}+\xi_1\right)(x-a)^n\varphi(x) \tag{6}$$

其中 $\xi_1\to 0\left(x\to a^+\right)$。由条件(ii)，得

$$f^{(n)}\left(a+(x-a)\theta(x)\right)=f^{(n)}(a)+\left(A+\xi_2\right)\varphi\left(a+(x-a)\theta(x)\right) \tag{7}$$

其中 $\xi_2\to 0\left(x\to a^+\right)$。把式(6)和式(7) 代入式(5)，得

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\left(\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}+\xi_1\right)(x-a)^n\varphi(x)=\frac{f^{(n)}(a)+\left(A+\xi_2\right)\varphi\left(a+(x-a)\theta(x)\right)}{n!}(x-a)^n$$

进而有 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\varphi\left(a+(x-a)\theta(x)\right)}{\varphi(x)}=\dfrac{n!}{C_n^{(\varphi)}}$。证毕。

在定理 2 中令 $\varphi(x)=(x-a)^\alpha$，并应用引理 1 可得如下推论 1。

推论 1[1] 设 I 是 R 上一区间，$a\in I$ 是 I 的左端点，函数 $f:I\to R$ 满足下列条件：

(i) 函数 f 在 I 上有直至 n 阶导数，(ii)存在实数 $\alpha>0$，使

$$\lim_{x\to a^+}\left(f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)\right)\Big/(x-a)^\alpha=A,$$

其中 A 是非零常数，则下列结论成立：

1° 存在一实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$，且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $\tilde f(x)\neq 0$，其中

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^{n+\alpha}}, & x\in(a,a+\delta),\\ \dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}, & x=a,\end{cases}$$

2° 若再设 $\forall x\in(a,a+\delta),\left(f^{(n)}(x)\right)'$ 存在且非

零，则对于任意 $x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为 $\theta(x)=\dfrac{c(x)-a}{x-a}$，$x\in(a,a+\delta)$，有下列性质：

c) 对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{n!}(x-a)^n$$

d) 存在极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\theta(x)=\left(\dfrac{n!\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$

4° 函数 $\overline{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$ 定义为 $\overline{c}(x)=\begin{cases}c(x),x\in(a,a+\delta),\\ a,\quad x=a\end{cases}$ 在 $x=a$ 可微且

$$\overline{c}_n^{(1)}(a)=\left(\frac{n!\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$$

在推论 1 中取 $\alpha=1$，可得如下推论 2。

推论 2[1]设 I 是 R 上一区间，$a\in I$ 是 I 的左端点，函数 $f:I\to R$ 满足在 I 上有直至 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$，则下列结论成立：

1° 存在一实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$，且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$。

2° 对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为 $\theta(x)=\dfrac{c(x)-a}{x-a}$，$x\in(a,a+\delta)$，有下列性质：

e) 对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{n!}(x-a)^n。$$

f) 存在极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\theta(x)=\dfrac{1}{n+1}$。

4° 函数 $\overline{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$ 定义为

$$\overline{c}(x)=\begin{cases}c(x),x\in(a,a+\delta),\\ a,\quad x=a\end{cases}$$

在 $x=a$ 可微且 $\overline{c}^{(1)}(a)=\dfrac{1}{n+1}$。

参考文献：

[1] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 泰勒公式“中间点函数”的一个注记[J]. 鲁东大学学报:自然科学版,2016,32(4):302-306.

[2] Azpeitja A G. On the Lagrange remainder of the Taylor formula[J].Amer. Math, 1982,89(5): 311-312.

[3] Jacobson B. On the mean value theorem for integrals[J]. Amer. Math, 1982, 89(5): 300-301.

[4] Duca D I, Pop O. On the intermediate point in Cauchy's mean-value theorem[J]. Math. Inequal, 2006, 9: 375-389.

[5] 张树义. 广义 Taylor 公式“中间点”一个更广泛的渐近估计式[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(11): 173-176.

[6] 张树义. 积分中值定理“中间点”更广泛的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报, 2005,4(3):15-19.

[7] 张树义. 关于“中间点”渐近性的两个结果[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版, 1995(2):109-111.

[8] 林媛,张树义. 广义泰勒中值定理“中间点”当 x→+∞ 时更广泛的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报, 2016, 15(3): 1-5.

[9] 张树义,赵美娜,郑晓迪. 积分中值定理中间点的渐近估计式[J].北华大学学报:自然科学版,2016,17(4), 448-454.

[10] 万美玲,张树义. 二元函数 Taylor 公式“中间点”的渐近估计式[J]. 鲁东大学学报：自然科学版,2016,32(2)：1-4.

[11] 伍建华,孙霞林,熊德之. 一类积分型中值定理的渐近性讨论[J].西南师范大学学报:自然科学版,2012,37(8): 24-27.