文章编号: 1674-8085(2016)06-0006-05

非线性薛定谔—麦克斯韦方程 无穷多高能解的存在性

吕定洋

(湖南第一师范学院数学与计算科学学院, 湖南, 长沙 410205)

摘要: 利用临界点理论研究了一类非线性 Schrödinger-Maxwell 方程, 对位势 V 和非线性项 f 做适当假设, 得到了方程无穷多高能解的存在性结果。本文允许 V 和 $f(x,t)$ 变号, 即使在定号的情形下, 所给出的条件仍比已有的结果弱, 并且去掉了几乎所有文献中所做的 $\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0$ 的假设。与已有文献利用山路定理研究不同, 本文利用喷泉定理, 所得结果推广和改进了原有文献的结论。

关键词: 薛定谔—麦克斯韦方程; 变分方法; 临界点理论; 喷泉定理; 高能解

中图分类号: O175

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.06.002

EXISTENCE OF INFINITELY MANY LARGE SOLUTIONS FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER-MAXWELL EQUATIONS

LÜ Ding-yang

(Department of Mathematics, Hunan First Normal University, Changsha, Hunan 410205, China)

Abstract: Based on the critical point theory, we study the existence of infinitely many high energy solutions for a class of nonlinear Schrödinger-Maxwell equations. Under certain assumptions on V and f , we obtain infinitely many large solutions for the equations. Furthermore, V and $f(x,t)$ are allowed to be sign-changing. Even in definite case, our assumptions are weaker than the existing results. Different from mountain pass theorem in previous literatures, we conduct the study by using fountain theorem. Our experimental results improve and generalize the existing results.

Key words: Schrödinger-Maxwell equations; variational methods; critical point theory; fountain theorem; high energy solution

0 引言

本文考虑如下形式的非线性 Schrödinger-Maxwell 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u = f(x,u), x \in R^3 \\ -\Delta \phi = u^2, x \in R^3 \end{cases} \quad (1)$$

该系统是物理学家们在求解非线性 Schrödinger

方程与一未知电场相互作用的驻波解时得到的, 更多物理背景的详述参考文献[1]。自从文献[1]的开创性工作以来, 变分法和临界点理论被广泛用来研究 Schrödinger-Maxwell 系统驻波界的存在性及不存在性问题。最近, 在文献[2]中, 在下列条件下, 作者讨论了系统(1)无穷多高能解的存在性:

收稿日期: 2016-04-03; 修改日期: 2016-05-13

基金项目: 湖南省自然科学基金项目(14JJ7083); 湖南省教育厅科学研究项目(14C0253)

作者简介: 吕定洋(1968-), 男, 湖南邵阳人, 副教授, 硕士, 主要从事偏微分方程临界点理论研究(E-mail:hncsydy@126.com)。

$$(V1) V \in C(R^N, R), \inf_{x \in R^N} V(x) \geq a_1 > 0$$

其中 $a_1 > 0$ 为常数; 且对任意 $M > 0$, $meas\{x \in R^3 | V(x) \leq M\} < \infty$ 。

$$(f1) f \in C(R^3 \times R, R)。对 2 < p < 2^* = 6, a_2 > 0, |f(x, z)| \leq a_2(1 + |z|^{p-1});$$

(f2) 存在 $\mu > 4$, 使得

$$\mu F(x, z) := \mu \int_0^z f(x, y) dy \leq z f(x, z), \\ x \in R^3, |z| \geq 1;$$

(f3) 当 $z \rightarrow 0$ 时, 对 $x \in R^3$ $f(x, z)/z \rightarrow 0$ 。

$$(f4) \inf_{x \in R^3, |z|=1} F(x, z) > 0;$$

$$(f5) f(x, -u) = -f(x, u), \forall (x, u) \in R^3 \times R。$$

据我们所知, 相关文献均要求 $V(x)$ 及 $f(x, t)$ 定号, 而本文将去掉定号的限制。

在文献[3]中, 作者用 Tang 在文献[4]中的方法, 利用对称山路定理研究了系统(1)的多重解。受文献[2]的启发, 本文用喷泉定理来研究系统(1)的高能解的存在性。不妨做以下假设:

$$(V) V \in (R^3, R), \inf_{x \in R^3} V(x) > -\infty 且 \forall M > 0, 有$$

$$meas\{x \in R^3 | V(x) \leq M\} < \infty。$$

$$(f'_1) f \in (R^3, R), 存在 c_1, c_2 > 0, p \in (4, 6),$$

使得

$$|f(x, t)| \leq c_1 |t| + c_2 |t|^{p-1}, \forall (x, t) \in (R^3 \times R);$$

$$(f'_2) \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|F(x, t)|}{t^4} = \infty。对于所有的 x \in R^3 一$$

致成立, 其中 $F(x, t) := \int_0^t f(x, s) ds$;

$$(f'_3) 设 G(x, t) := \frac{1}{4} f(x, t)t - F(x, t), 存在$$

$r_0 > 0$, 使得

$$F(x, t) \geq 0, G(x, t) \geq 0,$$

$$\forall (x, t) \in (R^3 \times R), |t| \geq r_0;$$

$$(f'_4) f(x, -t) = -f(x, t), \forall (x, t) \in R^3 \times R;$$

在这些条件下, 有:

定理 1 假设 V 和 f 满足条件 $(V), (f'_1) - (f'_4)$, 则问题 (1) 有无穷多解

$\{(u_k, \phi_k)\} \subset E \times D^{1,2}(R^3)$, 满足

$$\frac{1}{2} \int_{R^3} (|\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2) dx - \frac{1}{4} \int_{R^3} |\nabla \phi_k|^2 dx + \\ \frac{1}{2} \int_{R^3} \phi_k u_k^2 dx - \int_{R^3} F(x, u_k) \rightarrow +\infty。$$

注(i): 给出的条件允许 $V(x)$ 变号, 并且去掉了几乎所有文献中所做的 $\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0$ 的假设;

(ii) 条件 $(f'_1) - (f'_3)$ 允许 $f(x, t)$ 变号, 即使在定号的情形, 所给的条件仍比已有的结果弱。

例如: 设 $p \in (4, 6)$, 令 $f(x, t) = f(t) = t + |t|^{p-2}t$, 则容易验证 f 满足定理(1)的所有条件, 但

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 1, 不满足文献[2]的(f3);$$

(iii) (f'_1) 比 $(f1)$ 和 $(f3)$ 弱。事实上, 从 $(f1)$ 和 $(f3)$ 可得 $|f(x, t)| \leq \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}$ 。此即为 (f'_1) 。

2 预备知识

由 (f'_1) 易知, 对所有的 $x \in R^3$ 及 $t \in R$ 有:

$$F(x, t) \leq \frac{c_1}{2} t^2 + \frac{c_2}{p} |t|^p, \forall (x, t) \in R^3 \times R。$$

在本文中, 用如下形式的条件来代替 (V) 条件:

$$(V') V \in (R^3, R), \inf_{x \in R^3} V(x) \geq a_0 + 1, 且 \forall M > 0,$$

有 $meas\{x \in R^3 | V(x) \leq M\} < \infty$ 。

$$\text{令 } E = \{u \in H^1(R^3) : \int_{R^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx < +\infty\}。$$

其内积取为

$$(u, v)_E = \int_{R^3} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv) dx, u, v \in E。$$

则 E 在此内积下构成 Hilbert 空间, 相应的范数取为

$$\|u\| = \left\{ \int_{R^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \right\}^{1/2}, u \in E$$

下面给出本文需要的几个引理。

引理 1^[5] 设位势函数 V 满足 (V') 条件, 则对于所有的 $2 \leq r < 6$, E 紧嵌入 $L^r(R^3)$ 。

引理 2 (喷泉定理) 令 X 是 Banach 空间, 范数符号为 $\|\cdot\|$, X_j 是 X 的子空间, 其中

$\dim X_j < \infty, j \in N$, 并且满足 $X = \overline{\bigoplus_{j \in N} X_j}$, 令

$Y_k = \bigoplus_{j=1}^k X_j, Z_k = \overline{\bigoplus_{j=k+1}^{\infty} X_j}$, 考虑偶泛函

$\varphi \in C^1(X, R), x \in X$ 。对每一个 $k \in N$, 存在

$\rho_k > r_k > 0$, 使得

$$(\varphi_1) a_k := \max_{x \in Y_k, \|x\| = \rho_k} \varphi(x) \leq 0,$$

$$(\varphi_2) b_k := \inf_{x \in Z_k, \|x\| = r_k} \varphi(x) \rightarrow +\infty, \text{ 当 } k \rightarrow \infty$$

时,

$$(\varphi_3) \text{ 满足 } (C)_c \text{ 条件, } c > 0。$$

则 φ 有无界的临界值序列。

定义 1 称泛函 I 满足 $(C)_c$ 条件, 是指对任意一列 $\{u_n\} \subset E$, 若满足

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ 和 } \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \rightarrow 0,$$

则 $\{u_n\}$ 必有收敛子列, 其收敛极限是泛函 I 的临界点。

取 E 的规范正交基 $\{e_j\}$, 设

$$Y_k := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}, Z_k := Y_k^\perp。$$

引理 3 (见文献[3]) 对任意 $2 \leq s < 2^*$, 有

$$\beta_k := \sup_{u \in Z_k, \|u\|=1} |u|_{L^s} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty。$$

由文献[6]讨论可知, 对每个给定的 $u \in H^1(R^3)$, 存在唯一的 $\phi_u \in D^{1,2}(R^3)$, 使得

$$-\Delta \phi_u = u^2 \text{ 且 } \phi_u \text{ 可表成 } \phi_u = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|} dy, \text{ 因此}$$

$\phi_u \geq 0$ 。并且 $\|\phi_u\|_{D^{1,2}} \leq C \|u\|_{\frac{12}{5}}^2, \forall u \in E$ 。故

$$\int_{R^3} \phi_u u^2 dx \leq C \|u\|_{\frac{12}{5}}^4 \leq C \|u\|^4, \forall u \in E$$

在积空间 $E \times D^{1,2}$ 中定义泛函 Φ 如下:

$$\Phi(u, \phi) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{4} \int_{R^3} |\nabla \phi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{R^3} \phi_u u^2 dx - \int_{R^3} F(x, u) dx$$

由上面的讨论可知: Φ 是有意义的, 且 $\Phi \in C^1(E \times D^{1,2})$ 。由变分法和临界点理论可知, Φ 的临界点即为系统(1)的解。进一步地, 可将 Φ 化简为:

$$\Phi(u, \phi) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{R^3} \phi_u u^2 dx - \int_{R^3} F(x, u) dx, \forall u \in E \quad (2)$$

众所周知, 若 $u \in E$ 为 Φ 的一个临界点, 则 (u, ϕ_u) 便是系统(1)的一组解。易知, 对于 $\forall u, v \in E$, 有

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_{R^3} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx + \int_{R^3} \phi_u uv dx - \int_{R^3} f(x, u) v dx。$$

3 定理证明

定理 1 的证明: 考虑

$$\varphi(u) := \Phi(u, \phi) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{R^3} \phi_u u^2 dx - \int_{R^3} F(x, u) dx$$

则易知 $\varphi(-u) = \varphi(u)$, φ 是偶泛函。

1) 验证 φ 满足 $(C)_c$ 条件。

设 $\{u_m\} \subset E$, 满足 $\varphi(u_m) \rightarrow c, (1 + \|u_m\|)\varphi'(u_m) \rightarrow 0$, 设 m 充分大, 存在常数 $c_1 > 0$,

$$c_1 \geq \varphi(u_m) - \frac{1}{4} \varphi'(u_m) u_m =$$

$$\frac{1}{4} \|u_m\|^2 + \int_{R^3} G(x, u_m) \geq \frac{1}{4} \|u_m\|^2$$

故 $\{u_m\}$ 是 E 中的有界序列, 不妨设 u_m 弱收敛于 u , 根据引理 1, 在 $L^s(R^3), s \in [2, 2^*)$ 中, $u_m \rightarrow u$ 。

$$\|u_m - u\|^2 = (\varphi'(u_m) - \varphi'(u), u_m - u) -$$

$$\int_{R^3} (\phi_{u_m} u_m - \phi_u u)(u_m - u) dx +$$

$$\int_{R^3} (f(x, u_m) - f(x, u))(u_m - u) dx$$

由 u_m 弱收敛于 u , 易得

$$(\varphi'(u_m) - \varphi'(u), u_m - u) \rightarrow 0$$

由 (f'_1) 知,

$$|f(x, u)| \leq c_1 |u| + c_2 |u|^{p-1},$$

$$p \in (4, 6), \forall (x, u) \in (R^3 \times R).$$

利用 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} (f(x, u_m) - f(x, u))(u_m - u) dx \leq \\ & \int_{R^3} (c_1(|u| + |u_m|) + c_2(|u|^{p-1} + |u_m|^{p-1}))|u_m - u| dx \leq \\ & c_1(\|u_m\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})\|u_m - u\|_{L^2} + \\ & c_2(\|u_m\|_{L^p}^{p-1} + \|u\|_{L^p}^{p-1})\|u_m - u\|_{L^p} \end{aligned}$$

因为 $u_m \rightarrow u$. 在 $L^s(R^3)$ 中对所有 $s \in [2, 2^*)$ 成立,

从而有

$$\int_{R^3} (f(x, u_m) - f(x, u))(u_m - u) dx \rightarrow 0, \text{ 当 } m \rightarrow \infty \text{ 时}$$

因为 u_m 弱收敛于 u , 当 $2 \leq r < 6$ 时, 在 $L^r(R^3)$ 中有 $u_m \rightarrow u$. 且对于 a.e $x \in R^3$, 有 $u_m(x) \rightarrow u(x)$. 从而有 $\text{Sup}_{n \in N} \|u_m\|_r < \infty$ 且 $\|u\|_r$ 有界. 由 Hölder 不等式, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_{R^3} (\phi_{u_m} u_m - \phi_u u)(u_m - u) dx \leq \\ & \left(\int_{R^3} (\phi_{u_m} u_m - \phi_u u)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{R^3} (u_m - u)^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \left[2 \int_{R^3} (|\phi_{u_m} u_m|^2 + |\phi_u u|^2) \right]^{1/2} \|u_m - u\|_2 \leq \\ & C \left(\|\phi_{u_m}\|_6^2 \|u_m\|_3^2 + \|\phi_u\|_6^2 \|u\|_3^2 \right)^{1/2} \|u_m - u\|_2 \leq \\ & C(\|u_m\|^4 + \|u\|^4) \|u_m - u\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

从而有 $\|u_m - u\| \rightarrow 0$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时.

2) 验证 φ 满足引理 2 的剩余条件.

首先, 验证 φ 满足 (φ_1) .

可以证明 $\varphi(u) \rightarrow -\infty$, 当 $\|u\| \rightarrow \infty$ 时, 在 Y_k 中, $k \in N$.

不妨设 $\{u_m\}$ 满足 $\|u_m\| \rightarrow \infty$, 使得 $\varphi(u_m) \geq -M, M > 0$ 为某常数.

令 $v_m = u_m / \|u_m\|$, 则 $\|v_m\| = 1$, 从而在子列的意

义下, 存在某个 $v \in E$, 使得 v_m 弱收敛于 v . 由于 $\dim Y_k < \infty$, 故在 Y_k 中, 有 $v_m \rightarrow v \in Y_k$, 且 $v_m(x) \rightarrow v(x)$, 从而 $\|v\| = 1$.

令 $\Omega = \{x \in R^3 : v(x) \neq 0\}$, 则 $\text{meas}(\Omega) > 0$ 且对于几乎处处的 $x \in \Omega$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_m(x)| \rightarrow \infty$. 因此, 当 $n \in N$ 充分大时, $\Omega \subset \Omega_{v_0, \infty} = R^3 \setminus \Omega_n(0, r_0)$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \int_{R^3} F(x, u_m)}{\|u_m\|^4} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\|u_m\|^2 + \int_{R^3} \phi_m u_m^2 - 4\phi(u_m)}{\|u_m\|^4} \leq C \end{aligned} \tag{3}$$

另一方面, 由 F 的非负性及 Fatou 引理:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \int_{R^3} F(x, u_m) dx}{\|u_m\|^4} = \\ & 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_m\|^4} \int_{\Omega} F(x, u_m) dx = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_m\|^4} \cdot \\ & \left[\int_{\Omega(0, r_0)} F(x, u_m) dx + \int_{\Omega(r_0, \infty)} F(x, u_m) dx \right] \geq \\ & 4 \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[- \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) \int_{\Omega(0, r_0)} \frac{u_m^2}{\|u_m\|^4} dx + \right. \\ & \left. \int_{\Omega(r_0, \infty)} \frac{F(x, u_m) v_m^4}{u_m^4} dx \right] \geq \\ & 4 \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[- \frac{1}{\|u_m\|^2} \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{p} r_0^{p-2} \right) S_2^2 + \right. \\ & \left. \int_{\Omega} \frac{F(x, u_m) v_m^4}{u_m^4} dx \right] \geq \\ & \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_m) v_m^4}{u_m^4} dx \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

这显然与 (3) 矛盾. 因此, 可以选取充分大的 ρ_k , 使它满足

$$a_k := \max_{u \in Y_k, \|u\| = \rho_k} \varphi(u) \leq 0$$

其次, 再证明 φ 满足 (φ_2) .

由 (f'_1) 知,

$$F(x, u) \leq \frac{c_1}{2} u^2 + \frac{c_2}{p} |u|^p, \quad \forall (x, u) \in R^3 \times R.$$

由引理 3 可知, 存在整数 $m \geq 1$ 使得

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2c_1} \|u\|^2, \forall u \in Z_m, \text{ 则}$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{R^3} \phi_u u^2 - \int_{R^3} F(x, u) dx \geq$$

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{R^3} F(x, u) dx \geq$$

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{c_1}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{c_2}{p} \|u\|_{L^p}^p \geq$$

$$\frac{1}{4} \|u\|^2 - \beta_k^p \cdot \frac{c_2}{p} \|u\|_{L^p}^p$$

选取 $r_k = (2c_2\beta_k^p)^{\frac{1}{2-p}}$, 可得:

$$b_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\|=r_k} \varphi(u) \geq$$

$$\inf_{u \in Z_k, \|u\|=r_k} \left(\frac{1}{4} \|u\|^2 - \beta_k^p \cdot \frac{c_2}{p} \|u\|_{L^p}^p \right) =$$

$$(2c_2\beta_k^p)^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2p} \right)$$

由 $\beta_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, p > 2$ 知

$$b_k \geq (2c_2\beta_k^p)^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2p} \right) \rightarrow +\infty$$

从而证明 φ 满足 (φ_2) 。

根据 (V) 知, 存在一个常数 $V_0 > 0$, 使得

$$\bar{V}(x) := V(x) + V_0 \geq a_0 + 1 > 0, x \in R^N。$$

让 $\bar{f}(x, u) = f(x, u) + V_0 u$ 。那么易知:

引理 4 问题 (1) 与下列问题是等价的。

$$\begin{cases} -\Delta u + \bar{V}(x)u + \phi u = \bar{f}(x, u), x \in R^3, \\ -\Delta \phi = u^2, x \in R^3 \end{cases} \quad (4)$$

由上面的证明知系统 (4) 对应的泛函满足引理 2 的所有条件。再由引理 4 知, 系统(1)有无穷多高能解。定理证毕。

参考文献:

- [1] Fortunato V B D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations, Topol [J]. Journal of the Juliusz Schauder Center, 1998, 11: 283-293.
- [2] Chen S J, Tang C L. High energy solutions for the superlinear Schrödinger-Maxwell equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(10): 4927-4934.
- [3] 黄文念. Schrödinger-Maxwell 系统解的存在性与多重性[D].长沙:中南大学数计学院,2014:1-81.
- [4] Tang X H. Infinitely many solutions for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential and nonlinearity[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 401(1): 407-415.
- [5] Bartsch T, Wang Z Q, Willem M. The Dirichlet problem for superlinear elliptic equations[J]. Handbook of differential equations: stationary partial differential equations, 2005, 2: 1-55.
- [6] Evans L C. Partial Differential Equations[M]. New York: American Mathematical Society, 1998.