文章编号：1674-8085(2016)06-0001-05

复合 KdV 方程组的多种行波解

*王银玲，董仲周

（河南理工大学数学与信息科学学院，河南，焦作 454003）

摘　要：基于齐次平衡法的思想，利用辅助函数，将非线性偏微分方程组转化为代数方程组，并给出了复合 KdV 方程组的某些新的精确行波解，其中包括孤立波解、三角函数解、雅克比椭圆函数解和有理函数解。

关键词：辅助函数；复合 KdV 方程组；行波解

中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.06.001

MULTIPLE TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF THE COMPLEX COUPLED KDV EQUATIONS

* WANG Yin-ling，DONG Zhong-zhou

（School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University，Jiaozuo, Henan 454003，China）

Abstract: Based on the idea of the homogeneous balance method, we change the nonlinear partial differential equations into the Algebraic equations by means of the auxiliary functions method. Furthermore, we have obtained some new exact traveling wave solutions of the complex coupled KdV equations which include solitary wave solutions, trigonometric function solutions, Jacobian elliptic function solutions and rational solutions.

Key words: auxiliary function; complex coupled KdV Equations; solitary wave solutions

0 引言

非线性发展方程(组)的精确解研究，一直是数学物理研究的重点问题。为此，学者们提出了广田双线性法[1-2]，贝克隆变换法[3]，反散射方法[4]，Darboux 变换法[5]，齐次平衡法[6-7]，广义 tanh 函数法[8]等大量的求解方法。本文将研究复合 KdV 方程组，通过构造变换和辅助函数，把求解偏微分方程组问题转化为求解代数方程组的问题。本文的主要结果是得到复合 KdV 方程组的一些精确行波解，这些解将有助于人们更进一步地了解相应模型所描述的物理性质。

1　复合 KdV 方程组

$$\begin{cases} u_t + 3uu_x - 3\left(|v|^2\right)_x - \dfrac{1}{2}u_{xxx} = 0 \\ v_t - 3uv_x + v_{xxx} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

通过变换 $v = e^{i\theta} w(x,t)$，可化为

$$\begin{cases} u_t + 3uu_x - 6ww_x - \dfrac{1}{2}u_{xxx} = 0 \\ w_t - 3uw_x + w_{xxx} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 θ 为任意实数，$w(x,t)$ 为实函数。在文献[9]中，给出了式(1)与一个复合 mKdV 方程组的 Miura 变换。文献[10]利用三角函数、双曲函数和吴消元法得到了式(1)的几组行波解。利用辅助常

收稿日期：2016-06-27；修改日期：2016-08-28
基金项目：国家自然科学基金项目(11305048)
作者简介：*王银玲(1991-)，女，河南焦作人，硕士生，主要从事非线性数学物理与符号计算的研究(E-mail:yixianguang_910328@163.com);
董仲周(1980-)，男，山东泰安人，讲师，博士，主要从事非线性数学物理与符号计算的研究(E-mail:zzdong@hpu.edu.cn).

微分方程，文献[11]给出了式(1)的解析解。文献[12]利用广田双线性法研究了式(2)的 2-孤子解。利用改进的 Riccati 方程法，文献[13]给出了式(1)的几组精确行波解。

2 复合 KdV 方程的精确行波解

为了得到方程组(2)的行波解，先对它作变换：$u(x,t)=u(\xi)$，$w(x,t)=w(\xi)$，$\xi=kx+lt+c$，其中 k、l 和 c 为任意实数。这样，方程组(2)就成为一个常微分方程组

$$\begin{cases} lu_\xi+3kuu_\xi-6kww_\xi-\dfrac{k^3}{2}u_{\xi\xi\xi}=0 \\ lw_\xi-3kuw_\xi+k^3w_{\xi\xi\xi}=0 \end{cases} \tag{3}$$

为了得到常微分方程组(3)的精确解，假设

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_if^i(\xi),\quad w(\xi)=\sum_{j=0}^{n}b_jf^j(\xi) \tag{4}$$

其中 a_i，b_j 为待定系数，$f(\xi)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}=\sqrt{c_0+c_1f+c_2f^2+c_3f^3+c_4f^4} \tag{5}$$

$c_i\left(i=0,1,\cdots,4\right)$ 为常数，m 和 n 为待定整数，式(5)解的形式见文献[11]。为了得到 u 和 v 的显式表达式，可以分以下几个步骤来完成：

步骤 1：利用齐次平衡的思想，即平衡方程组(3)中的非线性项和最高导数项，得到 m 和 n 的值；

步骤 2：利用得到的 m 和 n 的值，并把(4)，(5)两式代入方程组(3)，令 f^j 和 $f^k\sqrt{\sum_{i=0}^{4}c_if^i}$ 的系数为零，得到关于 a_i 和 b_j 的代数方程组；

步骤 3：求解步骤 2 中得到的代数方程组；

步骤 4：利用方程(5)的已知解得到方程(3)的相应解。

为了确定 m 和 n 的值，需使方程中的非线性项与最高阶导数项中 f 的最高次数相等，即有

$$m+m+1=n+n+1=m+3,$$
$$m+n+1=n+3$$

由此可得 $m=n=2$。于是，式(4)变为

$$u=a_0+a_1f+a_2f^2,\quad w=b_0+b_1f+b_2f^2 \tag{6}$$

将式(5)，式(6)代入式(3)，利用 Maple 软件，得到一组关于 a_i，b_i (i=0, 1, 2)的代数方程组，

$$-24k^3a_2c_4+12k(a_2^2-2b_2^2)=0,$$
$$-3k^3(2a_1c_4+5a_2c_3)+18k(a_1a_2-2b_1b_2)=0,$$
$$4la_2-k^3(3a_1c_3+8a_2c_2)+$$
$$6k(2a_0a_2-4b_0b_2+a_1^2-2b_1^2)=0,$$
$$2la_1-k^3(a_1c_2+3a_2c_1)+6k(a_0a_1-2b_0b_1)=0,$$
$$6kb_2(4c_4k^2-a_2)=0,$$
$$3k^3(2b_1c_4+5b_2c_3)-3k(2a_1b_2+a_2b_1)=0,$$
$$2lb_2+k^3(3b_1c_3+8b_2c_2)-3k(2a_0b_2+a_1b_1)=0,$$
$$lb_1+k^3(b_1c_2+3c_1b_2)-3ka_0b_1=0。$$

利用 Maple 软件解上面的方程组可得：

$$a_0=\frac{4lc_4-k^3(3c_3^2-16c_2c_4)}{12kc_4},$$
$$a_1=2k^2c_3,\quad a_2=4k^2c_4,$$
$$b_0=\frac{16lc_4-k^3(3c_3^2-16c_2c_4)}{24\varepsilon kc_4},$$
$$b_1=\varepsilon k^2c_3,\quad b_2=2\varepsilon k^2c_4,$$

其中，$\varepsilon^2=1$，并且有 $c_1=\dfrac{c_3(4c_2c_4-c_3^2)}{8c_4^2}$，则可以得到方程组(1)的行波解为：

$$u=\frac{4lc_4-k^3(3c_3^2-16c_2c_4)}{12kc_4}+2k^2c_3f+4k^2c_4f^2,$$

$$v=e^{i\theta}\left[\begin{array}{l}\dfrac{16lc_4-k^3(3c_3^2-16c_2c_4)}{24\varepsilon kc_4}+\varepsilon k^2c_3f\\ +2\varepsilon k^2c_4f^2\end{array}\right],$$

其中，f 为方程(5)的精确解。由文献[14]给出的方程(5)的许多精确解，利用式(6)就可得到方程组(1)的许多显式的精确行波解。

2.1 孤立波解

A. 当 $c_0=c_1=c_3=0$，$c_2>0$，$c_4<0$ 时，式(5)有解 $f=\sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4}}\sec h\left(\sqrt{c_2}\xi\right)$，此时

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k},\quad a_1=0,\quad a_2=4k^2c_4,$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k},\quad b_1=0,\quad b_2=2\varepsilon k^2c_4,$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}=4k^2c_2\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{c_2}(kx+lt+c)\right],$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}-2\varepsilon k^2c_2\cdot\right.$$

$$\left.\sec h^2\left[\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]\right\};$$

B. 当 $c_1=c_3=0$，$c_0=\frac{c_2{}^2}{4c_4}$，$c_2<0$，$c_4>0$ 时，(5)式有解 $f=\sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right)$，此时，

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}-2k^2c_2\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\left(kx+lt+c\right)\right]$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}-\varepsilon k^2c_2\cdot\right.$$

$$\left.\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\left(kx+lt+c\right)\right]\right\} \tag{7}$$

C. 当 $c_0=c_1=0$，$c_3=2\varepsilon'\sqrt{c_2c_4}$，$c_2>0$，$c_4>0$ 时，(5)式有解

$$f=\frac{\sqrt{c_2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c^2}\zeta\right)}{2\sqrt{c_4}\left[\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\zeta\right)+\varepsilon'\right]},$$

此时，

$$a_0=\frac{l+k^3c_2}{3k}，\ a_1=4k^2\varepsilon'\sqrt{c_2c_4}，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{4l+k^3c_2}{6\varepsilon k}，\ b_1=2\varepsilon\varepsilon'k^2\sqrt{c_2c_4}，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+k^3c_2}{3k}-\frac{2k^2\varepsilon'c_2\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]}{\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]+\varepsilon'}+$$

$$\frac{k^2c_2\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]}{\left\{\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]+\varepsilon'\right\}^2},$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{4l+k^3c_2}{6\varepsilon k}-\frac{\varepsilon\varepsilon'k^2c_2\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]}{\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]+\varepsilon'}\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon k^2c_2\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]}{2\left\{\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]+\varepsilon'\right\}^2}\right\},$$

其中，$\varepsilon'^2=1$。

2.2 三角函数解

D. 当 $c_0=c_1=c_3=0$，$c_2<0$，$c_4>0$ 时，式(5)有解 $f=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec\left(\sqrt{-c_2}\xi\right)$，此时，

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}-4k^2c_2\sec^2\left[\sqrt{-c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]，$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}-2\varepsilon k^2c_2\cdot\right.$$

$$\left.\sec^2\left[\sqrt{-c_2}\left(kx+lt+c\right)\right]\right\};$$

E. 当 $c_0=\frac{c_2{}^2}{4c_4}$，$c_1=c_3=0$，$c_2>0$，$c_4>0$ 时，式(5)有解 $f=\sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\tan\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi\right)$，此时，

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}+2k^2c_2\tan^2\left[\sqrt{\frac{c_2}{2}}\left(kx+lt+c\right)\right]，$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}+\varepsilon k^2c_2\cdot\right.$$

$$\left.\tan^2\left[\sqrt{\frac{c_2}{2}}\left(kx+lt+c\right)\right]\right\} \tag{8}$$

2.3 椭圆函数解

F. 当 $c_0=-\dfrac{c_2^2m^2\left(1-m^2\right)}{c_4\left(2m^2-1\right)^2}$，$c_1=c_3=0$，$c_2>0$，$c_4<0$ 时，式(5)有解：

$$f=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4\left(2m^2-1\right)}}cn\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi,m\right)$$，此时，

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}-\frac{4k^2c_2m^2}{2m^2-1}cn^2\cdot\left[\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\left(kx+lt+c\right),m\right]$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}-\frac{2\varepsilon k^2c_2m^2}{2m^2-1}cn^2\cdot\left[\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\left(kx+lt+c\right),m\right]\right\}；$$

G. 当 $c_0=\dfrac{c_2^2\left(1-m^2\right)}{c_4\left(2-m^2\right)^2}$，$c_1=c_3=0$，$c_2>0$，$c_4<0$ 时，式(5)有解：

$$f=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4\left(2-m^2\right)}}dn\left(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi,m\right)$$，此时，

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}-\frac{4k^2c_2}{2-m^2}dn^2\cdot\left[\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\left(kx+lt+c\right),m\right]，$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}-\frac{2\varepsilon k^2c_2}{2-m^2}dn^2\cdot\left[\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\left(kx+lt+c\right),m\right]\right\}；$$

H. 当 $c_0=\dfrac{c_2^2m^2}{c_4\left(m^2+1\right)^2}$，$c_1=c_3=0$，$c_2<0$，$c_4>0$ 时，式(5)式有解：

$$f=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4\left(m^2+1\right)}}sn\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi,m\right)$$，此时，

$$a_0=\frac{l+4k^3c_2}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l+4k^3c_2}{3k}-\frac{4k^2c_2m^2}{m^2+1}sn^2\cdot\left[\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\left(kx+lt+c\right),m\right]，$$

$$v=e^{i\theta}\left\{\frac{2l+2k^3c_2}{3\varepsilon k}-\frac{2\varepsilon k^2c_2m^2}{m^2+1}sn^2\cdot\left[\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\left(kx+lt+c\right),m\right]\right\}$$

2.4 幂函数解

I. 当 $c_0=c_1=c_2=c_3=0$，$c_4>0$ 时，式(5)有解 $f=-\dfrac{1}{\sqrt{c_4}\xi}$，此时，

$$a_0=\frac{l}{3k}，\ a_1=0，\ a_2=4k^2c_4，$$

$$b_0=\frac{2l}{3\varepsilon k}，\ b_1=0，\ b_2=2\varepsilon k^2c_4，$$

则得方程(1)的解为：

$$u=\frac{l}{3k}+\frac{4k^2}{\left(kx+lt+m\right)^2}，$$

$$v=e^{i\theta}\left[\frac{2l}{3\varepsilon k}+\frac{2\varepsilon k^2}{\left(kx+lt+m\right)^2}\right]$$

3 结论

利用辅助函数，通过构造适当的变换，把求解非线性偏微分方程组的问题转化为求解代数方程组的问题，并求出了复合 KdV 方程组的精确行波解。通过与已有结果比较发现，(7)式和(8)式结果与文献[10-11]中结果等价，但本文中的其余结果未见报道，这些新解有助于对复合 KdV 方程组的物理运动规律做深入了解。本文使用的方法同样可用来求解其它某些非线性发展方程或方程组。

参考文献：

[1] Hirota R. Exact envelope‐soliton solutions of a nonlinear wave equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1973, 14(7): 805-809.

[2] Hirota R, Satsuma J. Soliton solutions of a coupled KdV equation[J]. Physics Letters A,1981,85: 404-408.

[3] Miura M R. Backlund Transformation[M]. Berlin: Springer-Verlag，1978.

[4] 谷超豪,郭柏灵,李翊神. 孤立子理论与应用[M]. 杭州: 浙江科技出版社,1990.

[5] Matveev V B, Salle M A. Darboux Transformation and Solitons[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[6] Wang Mingliang. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. Physics letters A, 1995, 199(3): 169-172.

[7] Zayed E M E, Zedan H A, Gepreel K A. On the solitary wave solutions for nonlinear Hirota–Satsuma coupled KdV of equations[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22(2): 285-303.

[8] Fan Engui. Soliton solutions for a generalized Hirota_Satsuna coupled KdV equation and a coupled MKdV equation[J]. Physics Letters A,2001,282: 18-22.

[9] Wu Yongtang, Geng Xianguo, Hu Xing-biao, et al. A generalized Hirota–Satsuma coupled Korteweg–de Vries equation and Miura transformations[J]. Physics Letters A, 1999, 255(4): 259-264.

[10] 赵堂进,孙维君. 复合 KdV 方程的行波解[J]. 山东理工大学学报:自然科学版,2004,18(4): 97-101.

[11] Zhang Huiqun. New exact travelling wave solutions to the complex coupled KdV equations and modified KdV equation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(9): 1776-1781.

[12] Gai Xiaoling, Gao Yitian, Yu Xin, et al. Two-Soliton Solutions and Interactions for the Generalized Complex Coupled Kortweg-de Vries Equations[J]. Communications in Theoretical Physics,2011,55(5): 473-480.

[13] Zhang Ping. New Exact Solutions to the Generalized Zakharov Equations and the Complex Coupled KdV Equations[J]. Studies in Mathematical Sciences, 2011,2(1): 63-72.

[14] Bai Chengjie, Zhao Hong. A New Rational Algebraic Approach to Find Exact Analytical Solutions to a (2+1)-Dimensional System[J]. Communications in Theoretical Physics, 2007,48(5): 801-810.