文章编号: 1674-8085(2016)03-0004-05

关于 Terai 猜想的一点注记

*管训贵¹, 潘小明²

(1.泰州学院数理学院, 江苏, 泰州 225300; 2.泰州学院, 江苏, 泰州 225300)

摘要: 运用 Gel'fond-Baker 方法证明了在一定条件下方程 $a^x + b^y = c^z$ 仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$, 并推广了文献[3]的结论。

关键词: 纯指数丢番图方程; Terai 猜想; Gel'fond-Baker 方法

中图分类号: O156.1

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.03.002

NOTE ON THE TERAİ'S CONJECTURE

*GUAN Xun-gui¹, PIAN Xiao-ming²

(1.School of Mathematics and Physics ,Taizhou University, Taizhou, Jiangsu 225300, China; 2. Taizhou University, Taizhou, jiangsu 225300, China)

Abstract: Based on the Gel'fond-Baker method, we prove that the equation $a^x + b^y = c^z$ has only the positive integer solution $(x, y, z) = (2, 2, r)$ has only the positive integer solution.

Key words: pure exponential Diophantine equations; Terai' conjecture; Gel'fond-Baker method

1 引言及主要结论

设 a, b, c 是大于 1 且两两互素的正整数。1994 年, Terai^[1]曾猜测: 若给定的正整数 a, b, c, p, q, r 满足 $a^p + b^q = c^r$, 这里 $\min(p, q, r) > 1$, 且 $\gcd(a, b) = 1$, 则丢番图方程

$$a^x + b^y = c^z, \quad x, y, z \in \mathbb{N} \quad (1)$$

仅有正整数解 $(x, y, z) = (p, q, r)$ 。

由于上述猜想与著名的广义费马猜想有关, 所以这是一个很有意义但又非常困难的问题, 目前仅解决了一些特殊情形。

设 r 是大于 1 的正整数, m 是正偶数, 且 $V(m, r) + U(m, r)\sqrt{-1} = (m + \sqrt{-1})^r$, 此时 $V(m, r)$ 和 $U(m, r)$ 是适合

$$\begin{aligned} V^2(m, r) + U^2(m, r) &= (m^2 + 1)^r, \\ \gcd(V(m, r), U(m, r)) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

的非零整数。

由(2)可知, 若 a, b, c 满足

$$a = |V(m, r)|, \quad b = |U(m, r)|, \quad c = m^2 + 1, \quad (3)$$

则必有

$$a^2 + b^2 = c^r, \quad \gcd(a, b) = 1 \quad (4)$$

即方程(1)有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。于是 Terai 猜想对此情况可表述为:

猜想 A 当 a, b, c 满足(3)时, 方程(1)仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 适合 $\min(x, y, z) > 1$ 。因 r 可分为奇、偶两种情形, 所以猜想 A 又可具体表述为:

猜想 B 设 $r > 1, 2 \nmid r, 2 \mid m$, 当 a, b, c 适合

$$\begin{aligned} a &= m \left| \sum_{i=0}^{(r-1)/2} (-1)^i \binom{r}{2i} m^{r-2i-1} \right|, \\ b &= \left| \sum_{i=0}^{(r-1)/2} (-1)^i \binom{r}{2i+1} m^{r-2i-1} \right|, \quad c = m^2 + 1 \end{aligned} \quad (5)$$

时, 方程(1)仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。

收稿日期: 2015-09-05; 修改日期: 2015-09-22

基金项目: 江苏省教育科学“十二五”规划课题(D201301083); 江苏省高等教育教改立项课题(2016JSJG249); 泰州学院教授基金项目(TZXY2015JBJ002); 云南省教育厅科研课题(2014Y462)

作者简介: *管训贵(1963-), 男, 江苏兴化人, 教授, 主要从事数论研究(E-mail:tzszxg@126.com);

潘小明(1969-), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士, 硕士生导师, 主要从事课程与教学论研究(E-mail:tzxykyc@163.com).

猜想 C 设 $r > 1, 2 \mid r, 2 \mid m$, 当 a, b, c 适合

$$a = \left| \sum_{i=0}^{r/2} (-1)^i \binom{r}{2i} m^{r-2i} \right|, \quad (6)$$

$$b = m \left| \sum_{i=0}^{(r-2)/2} (-1)^i \binom{r}{2i+1} m^{r-2i-2} \right|, \quad c = m^2 + 1$$

则方程(1)仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。

文献[2]证明了: 当 a, b, c 满足(5)式时, 如果 $m > 10^9 r^6$, 则方程(1)仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。

文献[3]证明了: 当 a, b, c 满足(6)式时, 如果 $m > \max\{10^{15}, 2r^3\}$, 则方程(1)仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。

本文用 Gel'fond-Baker 方法证明了以下定理:

定理 当 a, b, c 满足(6)式时, 如果 $m > 29000r^{8/3}$, 则方程(1)仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。

该结论改进了文献[3]的下界。事实上, 当 $r > 3.05 \times 10^{12}$ 时, $29000r^{8/3} < 2r^3$ 。因此文献[3]在 $2 \mid r$ 时的结论是本文的直接推论。

由于文献[4]已经解决了 $r = 4$ 的情形, 所以不妨设下文中的 $r \geq 6$ 。

2 若干引理

引理 1 当 $m > 2r/\pi$ 时, $V(m, r)$ 和 $U(m, r)$ 都是正整数。

证明 参见文献[5]中的引理 2。

引理 2 若 $m > r$, 则(i) $a^{5/2} > b^2$; (ii) $a^{7/2} > b^3$; (iii) $b^3 > a^2$; (iv) $x < z$ 。

证明 由 $m > r$ 知 $m > 2r/\pi$, 根据引理 1, $V(m, r)$ 和 $U(m, r)$ 都是正整数。

(i) 设 $\alpha = m + \sqrt{-1}$, $\beta = m - \sqrt{-1}$ 。由 $c = m^2 + 1$ 知

$$\alpha = \sqrt{c} e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad \beta = \sqrt{c} e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

这里 $\theta = \arctan \frac{1}{m}$ 。由于 $m > r \geq 6$, 故

$$\frac{1}{2m} < \theta < \frac{1}{m} \quad (7)$$

由(3)式和(7)式知

$$a = \sqrt{c^r} \cos r\theta, \quad b = \sqrt{c^r} \sin r\theta, \quad c = m^2 + 1 \quad (8)$$

假设 $a^{5/2} \leq b^2$, 则由(8)式可得

$$(\sqrt{c^r} \cos r\theta)^{5/2} \leq (\sqrt{c^r} \sin r\theta)^2,$$

即

$$c^{r/4} (\cos r\theta)^{5/2} \leq \sin^2 r\theta \quad (9)$$

又 $0 < r\theta < r/m < 1 < \pi/3$, 故 $c^{r/4} (\cos r\theta)^{5/2} > (\frac{1}{2})^{5/2} c^{r/4} > c$, 而 $\sin^2 r\theta < 1 < c$, 因此(9)式不成立,

从而必有 $a^{5/2} > b^2$ 。类似可证(ii)和(iii)成立。

(iv) 由 $a = V(m, r) = c^{r/2} \cos r\theta$ 及 $0 < r\theta < \pi/3$ 可知 $a > \frac{1}{2} c^{r/2} > c$, 从而由方程(1)知 $x < z$ 。

引理 3 若 $a^x \geq b^y$ 或 $a^{2x/3} \geq b^y$, 则 $z < \frac{r}{2}(x+1)$; 若 $a^x \leq b^y$, 则 $z < \frac{r}{2}(y+1)$; 若 $a^{2x/3} \leq b^y$, 则 $z < \frac{3}{4}r(y+1)$ 。

证明 若 $a^x \geq b^y$ 或 $a^{2x/3} \geq b^y$, 则 $0 < b^y/a^x \leq 1$ 。

由(4)式知, $c^r > a^2$, 即

$$\log c > \frac{2}{r} \log a \quad (10)$$

由(1)式和(10)式可得

$$z = \frac{x \log a + \log(1 + b^y/a^x)}{\log c} \leq$$

$$\frac{x \log a + \log 2}{\log c} < \frac{(x+1) \log a}{(2/r) \log a} = \frac{r}{2}(x+1)$$

类似可证 $a^x \leq b^y$ 的情形。

若 $a^{2x/3} \leq b^y$, 则 $c^r = a^x + b^y \leq b^{3y/2} + b^y < 2b^{3y/2}$ 。又由(4)式知, $c^r > b^2$, 即

$$\log c > \frac{2}{r} \log b \quad (11)$$

由(1)式和(11)式可得

$$z < \frac{(3y/2) \log b + \log 2}{\log c} <$$

$$\frac{(3y/2 + 3/2) \log b}{(2/r) \log b} = \frac{3}{4}r(y+1)$$

引理 4 设 $m > r^2$, (x, y, z) 是方程(1)满足(6)的一组适合 $(x, y, z) \neq (2, 2, r)$ 的正整数解, 则有

(i) $y \neq 1$; (ii) $y = 2$ 时, $x > 2 + m/r^2$; (iii) $y = 3$ 时, $x > m/r^2$; (iv) $y \geq 4$ 时, 若 $a^{2x/3} > b^y$, 则 $x \geq 2m^2/r^2$; 若 $a^{2x/3} \leq b^y$, 则 $y \geq 4m^2/(3r^3)$ 。

证明 由(6)式及方程(1)可得

$$\left(\sum_{i=0}^{r/2} (-1)^i \binom{r}{2i} m^{r-2i}\right)^x + \quad (12)$$

$$\left(m \left(\sum_{i=0}^{(r-2)/2} (-1)^i \binom{r}{2i+1} m^{r-2i-2}\right)\right)^y = (m^2 + 1)^z$$

(i) 假定 $y=1$, 若 $r \equiv 0 \pmod{4}$, 则对(12)式取模 m^2 可得 $r \equiv 0 \pmod{m}$; 若 $r \equiv 2 \pmod{4}$, 对(12)式取模 m 可得 $(-1)^x \equiv 1 \pmod{m}$, 故 x 为偶数, 此时对(12)式取模 m^2 仍得 $r \equiv 0 \pmod{m}$, 但 $m > r^2$, 矛盾, 故 $y \neq 1$ 。

(ii) $y=2$ 时, 若 $x=1$, 则由(1)式和(4)式可知, $z < r$ 。又 $a^2 - a = c^z(c^{r-z} - 1)$, $\gcd(a, c) = 1$, 故 $c^z \mid (a-1)$ 。于是得 $a > a-1 \geq c^z = a + b^2 > a$, 这不可能, 所以 $x > 1$ 。

由 $(x, y, z) \neq (2, 2, r)$ 知 $x > 2$ 。若 $x=3$, 则由(1)式和(4)式可知, $z > r$ 。又 $a^3 - a^2 = c^r(c^{z-r} - 1)$, $\gcd(a, c) = 1$, 故 $c^r \mid (a-1)$ 。于是得 $a > a-1 \geq c^r = a^2 + b^2 > a$, 这也不可能。类似可证 $x=4$ 时, $a^2 > a^2 - 1 \geq c^r = a^2 + b^2 > a^2$, 同样不可能, 故 $x \geq 5$ 。

根据引理 2 中的(i)知, $a^x > a^{x/2} \geq a^{5/2} > b^2$ 。由引理 3 可得

$$z < \frac{r}{2}(x+1) \quad (13)$$

对(12)式取模 m^3 可得

$$\frac{r(r-1)}{2}x - r^2 + z \equiv 0 \pmod{m}$$

因为 $x \geq 5$, 故

$$\frac{r(r-1)}{2}x - r^2 + z \geq m \quad (14)$$

将(13)式代入(14)式得

$$x > \frac{2r^2 - r + 2m}{r^2} > \frac{2r^2 + m}{r^2} = 2 + \frac{m}{r^2}$$

(iii) $y=3$ 时, 若 $x < 3$, 则由引理 2 中的(iii)知, $a^x < b^3$, 又由引理 3 可得

$$z < 2r \quad (15)$$

对(12)式取模 m^3 可得

$$\frac{r(r-1)}{2}x + z \equiv 0 \pmod{m}$$

故

$$\frac{r(r-1)}{2}x + z \geq m \quad (16)$$

将(15)式代入(16)式得 $m < \frac{r^2 + 3r}{2}$, 与 $m > r^2$ 矛盾。

若 $x=3$, 当 $a^3 < b^3$ 时, 仍可推出矛盾; 当 $a^3 > b^3$ 时, 由引理 3 可得(15)式, 同法推出矛盾, 故 $x \geq 4$ 。根据引理 2 中的(ii)知, $a^x > a^{7/2} > b^3$, 由引理 3 可得(13)。将(13)式代入(16)式可得

$$x > \frac{2m-r}{r^2} > \frac{m}{r^2}$$

(iv) $y \geq 4$ 时, 对(12)式取模 m^4 可得

$$\frac{r(r-1)}{2}x + z \equiv 0 \pmod{m^2}, \text{ 故}$$

$$\frac{r(r-1)}{2}x + z \geq m^2 \quad (17)$$

若 $a^{2x/3} > b^y$, 由引理 3 可得(13)式。将(13)式代入(17)式可得 $x > \frac{2m^2 - r}{r^2} > \frac{2m^2}{r^2} - 1$, 即 $x \geq 2m^2 / r^2$ 。

若 $a^{2x/3} \leq b^y$, 则由引理 3 可得

$$z < \frac{3}{4}r(y+1) \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式, 并根据引理 2 中的(iv)可得

$$y > \frac{8m^2}{3r(r^2 - r + 2)} - 1 > \frac{4m^2}{3r^3} - 1$$

即 $y \geq 4m^2 / (3r^3)$ 。

引理 5 设 a_1, a_2 是适合 $\min(a_1, a_2) > 10^3$ 的正整数, 对于正整数 b_1, b_2 , 设 $\Lambda = b_1 \log a_1 - b_2 \log a_2$, 当 $\Lambda \neq 0$ 时, $\log |\Lambda| > -28.51(\log a_1)(\log a_2)(1.05 + B)^2$, 这里 $B = \max\{5, 0.2468 + \log(\frac{b_1}{\log a_2} + \frac{b_2}{\log a_1})\}$ 。

证明 由文献[6]的定理 2 取 $\rho = e$ 即得。

引理 6 当 $\min(a, b, c) > 10^3$ 时, 若 (x, y, z) 是方程(1)适合 $a^{2x/3} \geq b^y$ 或者 $b^{2y/3} \geq a^x$ 的正整数解, 则必有 $x < 3131 \cdot \log c$ 或者 $y < 3131 \cdot \log c$ 。

证明 当 $a^{2x/3} \geq b^y$ 时, 在方程(1)的两边取对数可得

$$z \log c = \log(a^x + b^y) \leq \log(a^x + a^{2x/3}) = \log a^x \left(1 + \frac{1}{a^{x/3}}\right) = \quad (19)$$

$$x \log a + \log\left(1 + \frac{1}{a^{x/3}}\right) < x \log a + \frac{1}{a^{x/3}}$$

设 $a_1 = c$, $a_2 = a$, $b_1 = z$, $b_2 = x$; 又设

$\Lambda = z \log c - x \log a$ ，则由(19)式可知

$$0 < \Lambda < \frac{1}{a^{x/3}}$$

故有

$$\log|\Lambda| < -\frac{x}{3} \log a \quad (20)$$

另一方面，根据引理 5 可知

$$\log|\Lambda| > -28.51(\log c)(\log a)(1.05 + B)^2 \quad (21)$$

这里

$$B = \max \left\{ 5, 0.2468 + \log \left(\frac{z}{\log a} + \frac{x}{\log c} \right) \right\} \quad (22)$$

结合(20)式和(21)式得

$$28.51(\log c)(\log a)(1.05 + B)^2 > (x/3) \log a$$

即

$$85.53(\log c)(1.05 + B)^2 > x \quad (23)$$

若 $5 \geq 0.2468 + \log(z/\log a + x/\log c)$ ，则由(22)式可知 $B = 5$ ，将此代入(23)式可得 $x < 3131 \cdot \log c$ 。

若 $5 < 0.2468 + \log(z/\log a + x/\log c)$ ，则由(23)式可得

$$85.53(1.2968 + \log(\frac{z}{\log a} + \frac{x}{\log c}))^2 > \frac{x}{\log c} \quad (24)$$

由(19)式可知

$$\frac{z}{\log a} < \frac{x}{\log c} + \frac{1}{a^{x/3}(\log a)(\log c)} < \frac{71x}{70 \log c} \quad (25)$$

再由(24)式和(25)式可得

$$85.53(2 + \log \frac{x}{\log c})^2 > \frac{x}{\log c} \quad (26)$$

设 $X = x/\log c$ ， $f(X) = X - 85.53(2 + \log X)^2$ ，此时

$$\frac{df(X)}{dX} = 1 - \frac{171.06(2 + \log X)}{X} = \frac{X - 171.06 \log X - 342.12}{X}$$

由于 $f(3131) > 0$ ，且当 $X \geq 3131$ 时 $df(X)/dX > 0$ ，故当 $X \geq 3131$ 时，必有 $f(X) > 0$ 。因此由(26)式可知 $x < 3131 \cdot \log c$ 。

同理可证 $b^{2y/3} \geq a^x$ 时， $y < 3131 \cdot \log c$ 。

设 p 为素数， $\frac{a}{b}$ 为非零有理数，满足

$\gcd(a, b) = 1$ 。若 $\frac{a}{b} = \frac{p^r c}{d}$ ， $p \nmid cd$ ， r, c, d 为整数，

则定义 $v_p(\frac{a}{b}) = r$ ，称为 $\frac{a}{b}$ 的 p -adic 赋值。

令 $p = 2$ ，有

引理 7 设 α, β 是正奇数， b_1, b_2 是正整数， $\Lambda' = \alpha^{b_1} - \beta^{b_2}$ ，当 $\Lambda' \neq 0$ 时，如果 $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ ，则必有 $v_2(\Lambda') \leq 208(\log \alpha)(\log \beta)(\log B_1)^2$ ，这里 $v_2(\Lambda')$ 表示素数 2 在正整数 $|\Lambda'|$ 中的次数，且

$$\log B_1 = \max \left\{ \log \left(\frac{b_1}{\log \beta} + \frac{b_2}{\log \alpha} \right) + 0.04, 10 \right\}。$$

证明 参见文献[6]。

引理 8 方程(1)的正整数解 (x, y, z) 都满足

$$y < 208(\log c)(\log a)(\log B_1)^2$$

这里 $\log B_1 = \max \left\{ \log \left(\frac{z}{\log a} + \frac{x}{\log c} \right) + 0.04, 10 \right\}。$

证明 设 $\Lambda' = c^z - a^x$ 。显然 a, c 均为正奇数且 $c \equiv 1 \pmod{4}$ 。由 $\Lambda' = b^y$ 知 $y \leq v_2(\Lambda')$ 。

根据引理 7 可得本引理。

3 定理的证明

由于 $m > 29000r^{8/3}$ ，故有 $m > 3.447 \times 10^6$ 。设 (x, y, z) 是方程(1)的一组适合 $(x, y, z) \neq (2, 2, r)$ 的正整数解。由引理 4 中的(i)知 $y \neq 1$ 。以下证明其他情形下该解是不存在的。

情形 1 $y = 2$

根据引理 4 中的(ii)得 $x > 2 + m/r^2$ 。此时由引理 2 中的(i)知， x 必满足 $a^{2x/3} > b^2$ ，再根据引理 6，可得

$$2 + 2222.3m^{1/4} < 3131 \cdot \log(m^2 + 1) \quad (27)$$

但当 $m > 3.447 \times 10^6$ 时，(27)式不成立。

情形 2 $y = 3$

根据引理 4 中的(iii)得 $x > m/r^2$ 。此时由引理 2 中的(ii)知， x 必满足 $a^{2x/3} > b^3$ ，再根据引理 6，可得

$$2222.3m^{1/4} < 3131 \cdot \log(m^2 + 1) \quad (28)$$

但当 $m > 3.447 \times 10^6$ 时，(28)式不成立。

情形 3 $y \geq 4$

根据引理 4 中的(iv)知，若 $a^{2x/3} > b^y$ ，则 $x \geq 2m^2/r^2$ ，再根据引理 6，可得

$$m^{5/4} < 0.71 \cdot \log(m^2 + 1) \quad (29)$$

但当 $m > 3.447 \times 10^6$ 时，(29)式不成立。

根据引理 4 中的(iv)知, 若 $a^{2x/3} \leq b^y$, 则

$$y \geq \frac{4m^2}{3r^3} \quad (30)$$

当 $\log(z/\log b + y/\log c) + 0.04 \leq 10$ 时, 根据引理 8 可知

$$y < 208(\log c)(\log a)(\log 10)^2$$

结合 $\log a < (r/2)\log c$, 有

$$y < 104(\log 10)^2 r(\log c)^2 \quad (31)$$

由(30)式和(31)式知

$$m^{1/2} < 0.0000158 \cdot \log^2(m^2 + 1) \quad (32)$$

但当 $m > 3.447 \times 10^6$ 时, (32)式不成立。

当 $\log(z/\log b + y/\log c) + 0.04 > 10$ 时, 根据引理 8 可知

$$y < 208(\log c)(\log a)(\log(\frac{z}{\log a} + \frac{x}{\log c}) + 0.04)^2 \quad (33)$$

1) 若 $a^{2x/3} \leq b^y \leq a^x$, 则由 $m > 29000r^{8/3}$ 和 $\log a < (r/2)\log c$ 以及(30)式可得

$$139680m^{7/8} < y \leq \frac{x \log a}{\log b} < \frac{xr \log c}{2 \log b}$$

即

$$x > \frac{279360m^{7/8} \log b}{r \log c} > \frac{279360m^{7/8}}{r \log c} \quad (34)$$

因为 $c^z = a^x + b^y \leq 2a^x$, 所以

$$\frac{z}{\log a} \leq \frac{x}{\log c} + \frac{\log 2}{(\log c)(\log a)} < \frac{3x}{2 \log c} \quad (35)$$

又 $a^{2x/3} \leq b^y$, 故有

$$\frac{2x}{3 \log b} \leq \frac{y}{\log a} \quad (36)$$

将(35)式和(36)式代入(33)式可得

$$\frac{x}{\log b} < 312(\log c)(1 + \log \frac{x}{\log c})^2 \quad (37)$$

考虑到 $\log b < (r/2)\log c$, (37)式化为

$$\frac{x}{\log c} < 156r(\log c)(1 + \log \frac{x}{\log c})^2。$$

设 $X = x/\log c$, $f(X) = X - 156r(\log c)(1 + \log X)^2$,

$$X_0 = 624r(\log r)^2(\log c)(\log \log c)^2。$$

此时

$$\frac{df(X)}{dX} = 1 - \frac{312r(\log c)(1 + \log X)}{X}$$

因为 $f(X_0) > 0$, 且当 $X \geq X_0$ 时, $df(X)/dX > 0$,

故

$$\frac{x}{\log c} < 624r(\log r)^2(\log c)(\log \log c)^2 \quad (38)$$

由(34)式和(38)式并结合 $m > 29000r^{8/3}$ 可得

$$m^{1/8} < 0.00000100513(\log \frac{m^{3/8}}{47})^2。 \quad (39)$$

$$(\log(m^2 + 1))^3(\log \log(m^2 + 1))^2$$

但当 $m > 3.447 \times 10^6$ 时, (39)式不成立。

2) 若 $b^y > a^x > b^{2y/3}$, 则由 $c^z = a^x + b^y < a^x + a^{3x/2} < 2a^{3x/2}$ 得

$$\frac{z}{\log a} \leq \frac{3x}{2 \log c} + \frac{\log 2}{(\log c)(\log a)} < \frac{8x}{5 \log c} \quad (40)$$

又 $a^x < b^y$, 故有

$$\frac{x}{\log b} < \frac{y}{\log a} \quad (41)$$

将(40)式和(41)式以及 $\log b < (r/2)\log c$ 代入(33)式可得

$$\frac{x}{\log c} < 104r(\log c)(1 + \log \frac{x}{\log c})^2。$$

以下仿 1) 的证明知上式不成立。

3) 若 $b^{2y/3} \geq a^x$, 即 $a^{2x/3} \leq b^{4y/9} < b^y$, 则由(30)式和引理 6 可得

$$m^{7/8} < 0.02242 \cdot \log(m^2 + 1) \quad (42)$$

但当 $m > 3.447 \times 10^6$ 时, (42)式不成立。

综上, 方程(1)在题设条件下仅有正整数解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 。定理得证。

参考文献:

- [1] Terai N. The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ [J]. Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci., 1994, 70: 22-26.
- [2] Le M H. The Pure Exponential Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ for Generalized Pythagorean Triplets [J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 2010, 53(6): 1239-1248.
- [3] Le M H. Alain Togbé, Zhu H L, On a Pure ternary Exponential Diophantine equation [J]. Publ. Math. Debrecen, 2014, 5993: 1-17.
- [4] Yang S C. On the solutions of the Exponential Diophantine equation $|m^4 - 6m^2 + 1|^x + (4m^3 - 4m)^y = (m^2 + 1)^z$ [J]. Guangxi Sciences, 2007, 14(1): 19-21.
- [5] Le M H. A note on the Diophantine system $a^2 + b^2 = c^r$ and $a^x + b^y = c^z$ [J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 2008, 51(4): 677-684.
- [6] Bugeaud Y. Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$ [J]. Math. Proc Cambridge Phil Soc., 1999, 127(3): 373-381.