文章编号：1674-8085(2016)03-0001-03

基于圆盘极点约束的系统不确定项容忍区间分析

*王晓萌，姚　波，陈媛媛

（沈阳师范大学数学与系统科学学院，辽宁，沈阳　110034）

摘　要：在线性系统中基于 Lyapunov 稳定性理论，讨论了双不确定项同时波动时其容忍区间的算法，并结合闭环极点配置和线性矩阵不等完成圆盘极点配置问题中系统不确定项的冗余设计。数值仿真验证了本文控制器设计方法的可行性。

关键词：线性系统；极点配置；冗余度；不确定项；容忍区间

中图分类号：O231.1　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.03.001

UNCERTAINTIES TOLERANCE INTERVAL ANALYSIS SYSTEM BASED ON DISK POLE CONSTRAINTS

* WANG Xiao-meng, YAO Bo, Chen Yuan-yuan

(College of Mathematics and System Science,Shenyang Normal University, Shenyan, Liaoning 110034, China）

Abstract: Based on the state feedback controller design method, we discuss the uncertainties occur simultaneously double its volatility algorithm of tolerance range systems. We also combine with closed loop poles and LMI approaches and meet the given closed-loop poles arranged in the specified disk area. Numerical simulation verifies the feasibility of the controller design method.

Key words: linear systems; pole placement; redundancy; uncertainties; redundancy tolerance intervals

在线性系统中有关控制器设计的问题，极点配置起到了至关重要的作用[1-5]，给出了系统极点配置在平面上某种特定区域时的充要条件。随着可靠控制的提出，对于系统可靠控制器的设计给出了一些方法[6-8]，由于系统可靠控制的设计不仅使系统的能耗增加，而且提高了系统保守型，因而系统的容错设计受到了越来越多人的关注。关于硬件容错问题文献[9-11]给出有关冗余度的算法。

在实际生产生活中，系统往往伴随着不可确定因素的发生，若设计者可以把握好系统中不确定因素对系统影响程度，则可以设计出安全性能较高又节约能源的系统。如今在生物工程、航空航天、核反应堆等不确定因素对系统的影响不容忽视，工程设计者在设计过程中通过计算可以得到不确定因素的冗余度大小，很大程度上的降低故障的发生，确保其性能的稳定。人们需要同时具有较高的可靠性能与安全性能的系统，因此设计的控制器使得冗余系统在产生故障时仍可以保持良好的性能是十分必要的，而且实际意义也相当重大。

本文给出了系统在双不确定项同时波动仍能保持稳定的状态反馈控制器的设计问题，并且所给的闭环极点全部配置在指定的圆盘区域内。并用算例仿真证明了其可行性和有效性。

1　问题描述

考虑如下线性系统：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1}$$

式中，$x\in R^n$ 为系统的状态变量；$u\in R^m$ 为执行器的正常信号向量，A,B 是适维矩阵。

收稿日期：2015-12-24；修改日期：2016-03-10

作者简介：*王晓萌(1991-)，女，辽宁葫芦岛人，硕士生，主要从事广义系统研究(E-mail:529272164@qq.com);
姚　波(1962-)，女，辽宁沈阳人，教授，硕士生导师，主要从事动态系统鲁棒控制和容错控制研究(E-mail：boyao163@163.com);
陈媛媛(1987-)，女，辽宁阜新人，硕士生，主要从事广义系统研究(E-mail:1530686834@qq.com).

$$u(t)=Kx(t) \tag{2}$$

引理 1 对于系统（1），矩阵 A 的所有特征值均在半径为 r，中心在 $(-q,0)$ 的圆盘中的充分必要条件是存在对称的正定矩阵 X，使得

$$\begin{bmatrix} -rX & qX+AX \\ qX+XA^T & -rX \end{bmatrix}<0 \tag{3}$$

成立。

引理 2 存在控制器增益 K，使系统（1）的极点配置到半径 r，中心在 $(-q,0)$ 的圆盘内的充分必要条件为存在正定对称矩阵 X 和矩阵 P ,使得

$$\begin{pmatrix} -rX & qX+AX+BP \\ qX+XA^T+P^TB^T & -rX \end{pmatrix}<0 \tag{4}$$

成立，可行解 (X,P) ,则控制器增益矩阵为 $K=PX^{-1}$。

若考虑系统中不确定项，则系统可表述为：

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+Bu(t) \tag{5}$$

当上述系统中第 ij 项不确定项发生增益偏差时，系统中单一不确定项增益偏差模型为：

$$\Delta A=\begin{pmatrix} E_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{jj} \end{pmatrix}$$

其中 $E_{ij}\in\left[\underline{f_{ij}},\overline{f_{ij}}\right]$，$i=1,2,\cdots,m$。

为了方便表达，引进如下数学符号：

1) eig(A)代表矩阵 A 求特征值；

2) λ_{ijl} 代表不确定项第 ij 项出现波动时半生不系统第 l 个特征值；

3) Re[λ]代表的实部值；

4) Im[λ]代表的虚部值；

5) max(*a*,*b*)代表在 *a*,*b* 中取最大值；

6) min(*a*,*b*)代表在 *a*,*b* 中取最小值。

定义 1 对于系统不确定项的独立单一增益偏差模型，如果存在 $\underline{u_i}=\min[f_i]$ $\overline{u_i}=\max[f_i]$，当 $f_i\in(\underline{u_i},\overline{u_i})$ 使得闭环系统 $\dot{x}(t)=A_c(f_i)x(t)$ 的极点始终保持在半径为 r 的中心 $(-q,0)$ 的圆盘中，则称区间 $(\underline{u_i},\overline{u_i})$ 为不确定项增益波动的容忍区间，简称第 i 项不确定因素容忍区间，其中 $A_c(f_i)=(A+\triangle A+BK)$。

2 主要结果

定理 2 对于闭环系统中某不确定项区间为 $(\underline{u_i},\overline{u_i})$，且该系统的极点可配置在以半径为 r，中心在 $(-q,0)$ 的圆盘区域极点问题中，则称 $(\underline{u_i},\overline{u_i})$ 为该系统不确定因素增益偏差的容忍区间。

当且仅当 $d_{i\max}-r=0$ 的解为 f_{i1},f_{i2}，且

$$\underline{u_i}=\min(f_{i1},f_{i2}),\overline{u_i}=\max(f_{i1},f_{i2})$$

其中，$\lambda_{ij}(f_i)=eig(A_c(f_i))$，$x_{ij}=\mathrm{Re}[\lambda_{ij}(f_i)]$，$y_{ij}=\mathrm{Im}[\lambda_{ij}(f_i)]$，$d_{ij}=\sqrt{(x_{ij}+q)^2+y_{ij}^2}$，$d_{i\max}=\max(d_{ij}),j=1,2,\cdots,n$。

证：考虑系统不确定因素第 i 项因素出现波动，得出此时闭环系统矩阵 $A_c=(A+\Delta A+BK)$，其特征值 $\lambda_{ij}(f_i)=eig(A_c(f_i))$，若所有极点到圆心(−*q*,0)的最大距离 $d_{i\max}-r<0$，$d_{i\max}=\max(d_{ij}),j=1,2,\cdots,n$，$r$ 为圆盘半径，那么第 i 项不确定因素出现时仍在圆盘内。

当 $d_{i\max}-r>0$ 时，系统第 i 项不确定因素出现时极点不在圆盘内部。

当 $d_{i\max}-r=0$ 时，则为边界状态，即部分极点在圆盘边界上，此时参数 f_i 在某值处两侧扩展时，系统极点到圆心的距离是不断增大的，所以当 $d_{i\max}-r=0$ 时必会有两个解 f_{i1},f_{i2}，令 $\underline{u_i}=\min(f_{i1},f_{i2})$，$\overline{u_i}=\max(f_{i1},f_{i2})$，那么若 $d_{i\max}\in(\underline{u_i},\overline{u_i})$ 系统所有极点均在圆盘内。

若 $d_{i\max}\notin(\underline{u_i},\overline{u_i})$，系统有部分（或全部）极点已跳出圆盘，所以区间 $(\underline{u_i},\overline{u_i})$ 为圆盘区域极点问题中系统不确定因素第 i 项因素增益偏差的容忍区间。

3 数值仿真

例 $\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+G\omega(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$

其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&2&1.5\end{bmatrix}\quad r=1.5;q=1.5;$$

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$$

根据引理 2 ，进行控制器设计，将上述系统的

极点配置到半径$r=1.5,(-1.5,0)$为中心的圆盘内。现在研究该系统的不确定项在圆盘区域极点问题中，系统中不确定项第ij项不确定项增益偏差的容忍区间$\left(\underline{u}_{ij},\overline{u}_{ij}\right)$，根据系统各不确定项容忍区间，容易得知容忍区间越小，系统此项不确定项的可靠性对系统越重要。

由引理 2 设计的控制器，将不稳定系统的极点配置到以半径$r=1.5$，$(-1.5,0)$为中心的圆盘内，如图 1 所示。

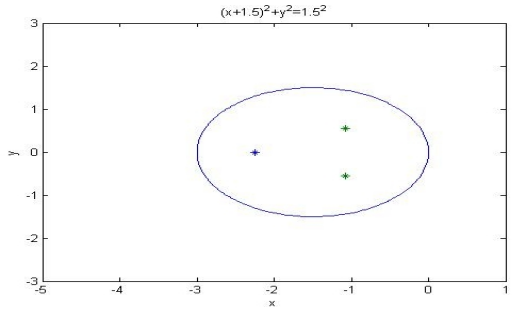

图 1 定常闭环系统极点分布图

Fig.1 Constant closed loop system poles map

当系统中加入双不确定项时，系统不再稳定，引起圆盘极点配置发生如下变化，如图 2 所示。

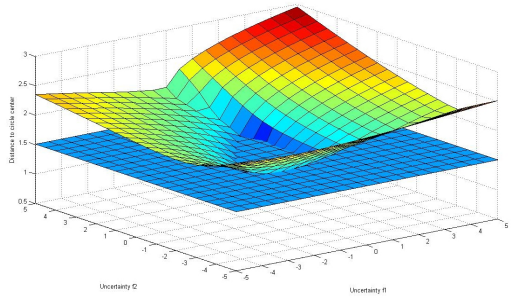

图 2 系统不确定项引起圆盘极点配置的变化

Fig.2 Uncertainties caused by changes in the system disk pole assignment

由于图 2 是三维立体图形，不易清楚观测出不确定项对系统极点配置的影响，故将图 2 对 xy 平面进行切面投影，如图 3。

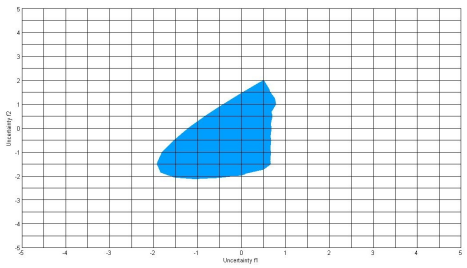

图 3 系统不确定项引起圆盘极点配置的变化的平面投影

Fig.3 Uncertainties caused by changes in the system configuration of the disk pole projection plane

从图 3 中可以清晰地看出不确定项对系统影响的大小。综上，系统在保证一定性能指标下，可容忍不确定项波动范围，当系统中双不确定项波动时，所得到的是一个空间图形，进行切面投影后，可以看到各不确定项对于系统所构成影响的大小。

4 结论

本文给出了系统在双不确定项同时波动仍能保持稳定的状态反馈控制器的设计问题，并且所给的闭环极点全部配置在指定的圆盘区域内。算例仿真证明了其控制器设计的可行性和有效性。

参考文献：

[1] 王福忠,辛健. 基于极点配置执行器增益偏差容忍区间的分析[J].控制工程, 2012,19(5):740-742.

[2] 刘子平,王福忠. 具有圆盘极点约束的性能指标容忍区间分析[J].数字技术与应用, 2011,11:171-172.

[3] 刘子平,王福忠. 执行器增益波动容忍区间分析[J].自动化与信息工程, 2011,5:9-13.

[4] Veillette R J, Medanic J B, Perkins W R. Design of reliable control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1992, 37(3): 290-304.

[5] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable controller design for linear systems[J]. Automatica, 2001, 37(5): 717-725.

[6] Liu J, Wan J L, Yang G. Reliable robust minimum variance filtering with sensor failures[C]. Proceedings of the 2001 American Control Conference, IEEE, 2001, 2: 1041-1046.

[7] 王福忠,姚波,张嗣瀛.线性系统区域稳定的可靠控制[J].控制理论与应用, 2004, 21(5):835-839.

[8] 姚波,张庆灵,王福忠,等. 具有传感器故障的可靠圆盘极点配置[J].控制与决策, 2004, 19(3):346-348.

[9] 俞立,陈国定,杨马英. 不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制[J].自动化学报, 2000,26(l):116-120.

[10] 俞立,陈国定,杨马英. 不确定系统的鲁棒输出反馈区域极点配置[J].控制理论与应用,2002,19(2):244-247.

[11] Wang X A, Konigorski U. On Linear solutions of the output feedback pole assignment problem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(9): 2354-2359.