文章编号：1674-8085(2016)01-0022-04

一类二阶半线性中立型微分方程的振动性质

*林文贤，陈燕芬

（韩山师范学院数学与统计学院，广东，潮州 521041）

摘　要：利用 Riccati 变换，获得了一类二阶半线性中立型泛函微分方程的振动准则，推广和改进了最近文献的结果。

关键词：泛函微分方程；振动准则；中立型；半线性

中图分类号：O175.13 **文献标识码**：A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.01.005

OSCILLATION FOR SECOND ORDER HALF-LINEAR NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

LIN Wen-xian, CHEN Yan-fen

（College of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou,Guangdong 521041，China）

Abstract: Based on the Riccati transformation method, some new interval oscillatory criterions for second order half-linear neutral functional differential equations are obtained. The results generalize and improve some known results.

Key words: functional differential equation; oscillation criteria; neutral; half-linear

讨论一类广义二阶 Emden-Fowler 中立型泛函微分方程

$$\begin{aligned}&[r(t)\,|\,y'(t)\,|^{\alpha-1}\,(y'(t))]'+\\&q_0(t)\,|\,x(\sigma_0(t))\,|^{\alpha-1}\,(x(\sigma_0(t)))+\\&q_1(t)\,|\,x(\sigma_1(t))\,|^{\beta_1-1}\,x(\sigma_1(t))+\\&q_2(t)\,|\,x(\sigma_2(t))\,|^{\beta_2-1}\,x(\sigma_2(t))=0,t\ge t_0\end{aligned} \tag{1}$$

其中，α,β_1,β_2 是常数，$y(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$，且有下列条件成立：

(H_1) $p(t),q_0(t),q_1(t),q_2(t)\in C(I,[0,\infty)),$

$I=[t_0,\infty),0\le p(t)\le p<1,\beta_2>\alpha>\beta_1>0;$

(H_2) $r(t)\in C^1(I,(0,\infty)),r'(t)\ge 0,$

$\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r(t)}\right)^{1/\alpha}\mathrm{dv}=\infty;$

(H_3) $\tau(t),\sigma_0(t),\sigma_1(t),\sigma_2(t)\in C(I,R),$

$\tau(t)\le t,\sigma_0(t)\le t,\sigma_1(t)\le t,\sigma_2(t)\le t,$

且 $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_0(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_1(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_2(t)=\infty$。

中立型泛函微分方程出现在高速计算机无损传输网络的数学模型中，且在弹性杆的振动质量、神经力学系统中的惯性以及自动控制理论研究中均有广泛应用[1]。基于中立型泛函微分方程的实际应用背景，吸引了很多学者的研究兴趣[2-9]。当 $q_0(t)=0$ 时，方程(1)就是文献[2]所研究的方程；当 $\alpha=1,q_0(t)=q_2(t)=0$ 时，方程(1)就是文献[3]所研究的方程：当 $p(t)=0,q_0(t)=q_2(t)=0$ 时，方程(1)就是文献[4]所研究的方程。本文将建立方程(1)的若干振动准则，使得文献[2]成为本文结果的特例，并且推广和改进文献[3-4]的相应结果。关于本文中的函数不等式，如果没有特别说明，都是对一切充分大

收稿日期：2015-05-03；修改日期：2015-09-15
基金项目：广东省高等教育教学改革项目(GDJG20142396)，广东省高等学校特色创新项目(2014GXJK125)
作者简介：林文贤（1966-），男，广东潮州人，教授，主要从事泛函微分方程理论研究(E-mail:linwx66@163.com)；
陈燕芬（1970-），女，广东潮州人，副教授，主要从事微分方程理论研究(E-mail:chyf2006@hstc.edu.cn).

的t成立。

1　主要结果

引理 1　设$x(t)$是方程(1)的最终正解，则存在$t_1 \ge t_0$，使得$y(t)>0, y'(t)>0, y''(t)\le 0, t\ge t_1$。

证明　设$x(t)$是方程(1)的最终正解，由条件(H_1)和(H_3)，有$[r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t)]'\le 0$。因此函数$r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t)$单调减少且最终定号，故$y'(t)$最终定号，即$y'(t)>0$或$y'(t)<0$。现断言$y'(t)>0$，否则存在$t_1\ge t_0$，使得$y'(t_1)<0$，于是有

$$r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t)\le$$
$$r(t_1)|y'(t_1)|^{\alpha-1}y'(t_1)=:-M<0, t\ge t_1$$

因而

$$y'(t)\le -\left[\frac{M}{r(t)}\right]^{1/\alpha}<0, t\ge t_1$$

然后从t_1到t积分得

$$0<y(t)\le y(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left(\frac{M}{r(t)}\right)^{1/\alpha}\mathrm{d}t$$

令$t\to\infty$,由(H_2)，有$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=-\infty$，这与$y(t)>0, t\ge t_1$矛盾，所以有$y'(t)>0, t\ge t_1$。

因而，$[r(t)(y'(t))^{\alpha}]'\le 0$，注意到$r'(t)>0$，可得$y''(t)\le 0, t\ge t_1$。

引理 2　设$x(t)$是方程(1)的最终正解，且下列三式之一成立：

(ⅰ) $\int_{t_0}^{\infty}q_0(t)\sigma_0^{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t=\infty$；　(2)

(ⅱ) $\int_{t_0}^{\infty}q_1(t)\sigma_1^{\beta_1}(t)\,\mathrm{d}t=\infty$；　(3)

(ⅲ) $\int_{t_0}^{\infty}q_2(t)\sigma_2^{\beta_2}(t)\,\mathrm{d}t=\infty$.　(4)

则$y(t)>ty'(t)$且$\left(\dfrac{y(t)}{t}\right)'<0$。

证明　设$x(t)$是方程(1)的最终正解，由引理 1 知 $y'(t)>0$，因此有$x(t)>(1-p)y(t)$。则由方程(1)产生

$$[r(t)(y'(t))^{\alpha}]'+q_0(t)(1-p)^{\alpha}y^{\alpha}(\sigma_0(t))+$$
$$q_1(t)(1-p)^{\beta_1}y^{\beta_1}(\sigma_1(t))+q_2(t)(1-p)^{\beta_2}y^{\beta_2}(\sigma_2(t))\le 0, \tag{5}$$

定义函数

$$\varphi(t)=y(t)-ty'(t),$$

则

$$\varphi'(t)=-ty''(t)>0,$$

故$\varphi(t)$单调增加且最终定号。现断言$\varphi(t)>0$。否则若$\varphi(t)\le 0$，有

$$\left(\frac{y(t)}{t}\right)'=\frac{ty'(t)-y(t)}{t^2}\ge 0,$$

因此，$\dfrac{y(t)}{t}$最终非减。故存在常数$K_1, K_2>0$和T充分大，使得

$$\frac{y(\sigma_0(t))}{\sigma_0(t)}\ge K_0, \frac{y(\sigma_1(t))}{\sigma_1(t)}\ge K_1, \frac{y(\sigma_2(t))}{\sigma_2(t)}\ge K_2, t\ge T, \tag{6}$$

联合式(5)和式(6)，得到

$$[r(t)(y'(t))^{\alpha}]'+q_0(t)[K_0(1-p)]^{\alpha}\sigma_0^{\alpha}(t)+$$
$$q_1(t)[K_1(1-p)]^{\beta_1}\sigma_1^{\beta_1}(t)+q_2(t)[K_2(1-p)]^{\beta_2}(\sigma_2^{\beta_2}(t)\le 0,$$

则有

$$[r(t)(y'(t))^{\alpha}]'\le -q_1(t)[K_1(1-p)]^{\beta_1}\sigma_1^{\beta_1}(t),\quad t\ge T,$$

即

$$[r(t)(y'(t))^{\alpha}]'\le -q_1(t)[K_1(1-p)]^{\beta_1}\sigma_1^{\beta_1}(t),\quad t\ge T,$$

对上式积分，有

$$0<r(t)(y'(t))^{\alpha}\le r(T)(y'(T))^{\alpha}-$$
$$[K_1(1-p)]^{\beta_1}\int_T^t q_1(s)\sigma_1^{\beta_1}(s)\,\mathrm{d}s,$$

上式中令$t\to\infty$，利用式(3)，产生矛盾。同样，利用式(2)或式(4)，也产生矛盾。因此$\varphi(t)>0$成立。

引理 3[10]　设$a,b\in R, p>1, q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$|ab|\le\frac{1}{p}|a|^p+\frac{1}{q}|b|^q。$$

引理 4[10]　设$A>0, B>0, X\ge 0$，则

$$AX-BX^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\le\frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{A^{\alpha+1}}{B^{\alpha}}$$

定理 1　设式(2)−式(4)至少一式成立，且存在函数$\rho(t)\in C^1(I,(0,\infty))$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left(\rho(s)Q(s)-\frac{(\rho'(s))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)}{\rho^{\alpha}(s)}\right)\mathrm{d}s=\infty \tag{7}$$

其中

$$Q(t)=[q_0(t)+(q_1(t))^{\frac{\beta_2-\alpha}{\beta_2-\beta_1}}(q_2(t))^{\frac{\alpha-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}}]\left[\frac{(1-p)\sigma(t)}{t}\right]^{\alpha},$$
$$\sigma(t)\le\min\{\sigma_0(t),\sigma_1(t),\sigma_2(t)\}, \tag{8}$$

则方程(1)是振动的。

证明 设 $x(t)$ 是方程(1)的非振动解，不失一般性，可设 $x(t)>0$，$t\ge t_0$。由引理1，有 $y(t)>0, y'(t)>0, t\ge t_1$。令

$$W(t)=\rho(t)r(t)\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{\alpha},\ t\ge t \tag{9}$$

则

$$W'(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)+\frac{\rho(t)}{y^{\alpha}(t)}\left(r(t)(y'(t))^{\alpha}\right)'-\alpha\rho(t)r(t)\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{\alpha+1},$$

利用式(5)和式(9)，有

$$W'(t)\le-\frac{\rho(t)}{y^{\alpha}(t)}[q_0(t)(1-p)^{\alpha}y^{\alpha}(\sigma_0(t))+q_1(t)(1-p)^{\beta_1}y^{\beta_1}(\sigma_1(t))+q_2(t)(1-p)^{\beta_2}y^{\beta_2}(\sigma_2(t))]+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-\frac{\alpha}{[\rho(t)r(t)]^{1/\alpha}}W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t), \tag{10}$$

由引理3，可得

$$q_1(t)(1-p)^{\beta_1}y^{\beta_1}(\sigma_1(t))+q_2(t)(1-p)^{\beta_2}y^{\beta_2}(\sigma_2(t))\ge\frac{\beta_2-\alpha}{\beta_2-\beta_1}\{[q_1(t)((1-p)y(\sigma_1(t)))^{\beta_1}]^{\frac{\beta_2-\alpha}{\beta_2-\beta_1}}\}^{\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2-\alpha}}+\frac{\alpha-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\{[q_2(t)((1-p)y(\sigma_2(t)))^{\beta_2}]^{\frac{\alpha-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}}\}^{\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha-\beta_1}}\ge$$

$$(q_1(t))^{\frac{\beta_2-\alpha}{\beta_2-\beta_1}}[((1-p)y(\sigma_1(t)))]^{\frac{\beta_1\beta_2-\alpha\beta_1}{\beta_2-\beta_1}}\times(q_2(t))^{\frac{\alpha-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}}[((1-p)y(\sigma_2(t)))^{\beta_2}]^{\frac{\alpha\beta_2-\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}}\ge(q_1(t))^{\frac{\beta_2-\alpha}{\beta_2-\beta_1}}(q_2(t))^{\frac{\alpha-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}}[(1-p)y(\sigma(t))]^{\alpha},$$

因此，式(10)化为

$$W'(t)\le-\rho(t)[q_0(t)+(q_1(t))^{\frac{\beta_2-\alpha}{\beta_2-\beta_1}}(q_2(t))^{\frac{\alpha-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}}][\frac{(1-p)y(\sigma(t))}{y(t)}]^{\alpha}+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-\frac{\alpha}{[\rho(t)r(t)]^{1/\alpha}}W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t), \tag{11}$$

由引理2知函数 $\frac{y(t)}{t}$ 单调减少，故有

$$\frac{y(\sigma(t))}{y(t)}\ge\frac{\sigma(t)}{t}. \tag{12}$$

联合式(8)，式(11)和式(12)，得到

$$W'(t)\le-\rho(t)Q(t)+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-\frac{\alpha}{[\rho(t)r(t)]^{1/\alpha}}W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \tag{13}$$

由引理4，有

$$W'(t)\le-\rho(t)Q(t)+\frac{\left(\rho'(t)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(t)}{\rho^{\alpha}(t)},\ t\ge t_1 \tag{14}$$

积分式(14)可得

$$W(t)\le W(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left(\rho(s)Q(s)-\frac{\left(\rho'(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)}{\rho^{\alpha}(s)}\right)\mathrm{d}s$$

令 $t\to\infty$，注意到式(8)，有 $W(t)\to-\infty$，这与 $W(t)>0$ 矛盾。因此，方程(1)没有最终正解。故方程(1)振动。

推论1 设式(2)−式(4)至少一式成立，且

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}Q(s)\mathrm{d}s=\infty,$$

则方程(1)是振动的。

证明 只需在定理1中取 $\rho(t)=1$ 即可。

下面给出方程(1)的 Kamenev 型振动准则。

定理2 设除式(7)外定理1的全部假设都成立，若当 $n>1$ 时，有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n\left(\rho(s)Q(s)-\frac{\left(\rho'(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)}{\rho^{\alpha}(s)}\right)\mathrm{d}s=\infty \tag{15}$$

其中 $Q(t)$ 由(8)定义，则方程(1)是振动的。

证明 如同定理1的证明一样，设 $x(t)$ 是方程(1)的非振动解，不失一般性，设 $x(t)>0$，$x(\tau(t))>0$，$x(\sigma_1(t))>0$，$x(\sigma_2(t))>0$，$t\ge t_1$，故有 $y(t)>0$。令 $W(t)$ 的定义同(9)，则 $W(t)>0$，$t\ge t_1$，且式(14)成立。由(14)得到

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^n\left(\rho(s)Q(s)-\frac{\left(\rho'(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)}{\rho^{\alpha}(s)}\right)\mathrm{d}s\le-\int_{t_1}^{t}(t-s)^nW'(s)\mathrm{d}s,\ n>1.$$

注意到

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^nW'(s)\mathrm{d}s=n\int_{t_1}^{t}(t-s)^{n-1}W(s)\mathrm{d}s-W(t_1)(t-t_1)^n,$$

有

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{t}(t-s)^nR(s)\mathrm{d}s=W(t_1)\left(\frac{t-t_1}{t}\right)^n-\frac{n}{t^n}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{n-1}W(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$R(s)=\rho(s)Q(s)-\frac{\left(\rho'(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{r(s)}{\rho^{\alpha}(s)},$$

因此

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{t}(t-s)^nR(s)\mathrm{d}s\le W(t_1)\left(\frac{t-t_1}{t}\right)^n,$$

则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{t}(t-s)^n R(s)\mathrm{d}s\le W(t_1)<\infty,$$

上式与条件(15)矛盾。定理 2 成立。

下面利用 Philos 型的积分平均技巧[9]，得出方程(1)的新的振动定理。为此引进如下一类函数 $\wp$，令 $D=\{(t,s)\mid t\ge s\ge t_0\}$，$D_0=\{(t,s)\mid t>s\ge t_0\}$。

函数 $H(t,s)\in C(D,R)$ 称为属于 $\wp$ 类，记作 $H\in\wp$，如果

(ⅰ) $H(t,t)=0,t\ge t_0;H(t,s)>0,(t,s)\in D_0;$

(ⅱ) $\dfrac{\partial H}{\partial s}\le 0$，$(t,s)\in D_0$ 且存在函数 $h(t,s)\in C(D_0,R)$ 和 $\rho(t)\in C^1(I,(0,\infty))$，使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}+H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}=-h(t,s)H^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t,s),$$

$$(t,s)\in D_0. \tag{16}$$

定理 3 设式(2)—式(4)至少一式成立，且存在函数 $\rho(t)\in C^1(I,(0,\infty))$ 和 $H\in\wp$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\bullet$$

$$\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\left(\frac{|h(s,a)|}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\rho(s)r(s)\right]\mathrm{d}s=\infty \tag{17}$$

其中 $h(t,s)$ 由式(16)定义，则方程(1)是振动的。

证明 设 $x(t)$ 是方程(1)的非振动解，不妨设 $x(t)>0$，$x(\tau(t))>0$，$x(\sigma_0(t))>0$，$x(\sigma_1(t))>0$，$x(\sigma_2(t))>0$，$t\ge t_1$，故有 $y(t)>0$。令 $W(t)$ 的定义同(9), 则 $W(t)>0$，$t\ge t_1$，且式(13)成立。记

$$A(t)=\frac{\alpha}{[\rho(s)r(s)]^{1/\alpha}},\quad B(s)=\frac{\rho'(s)}{\rho(s)},$$

则由式(13)得到

$$\int_{t_1}^{t}H(t,s)\rho(s)Q(s)\mathrm{d}s\le$$

$$\int_{t_1}^{t}H(t,s)[-W'(s)+B(s)W(s)-A(s)W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)]\mathrm{d}s=$$

$$-H(t,s)W(s)\Big|_{t_1}^{t}+$$

$$\int_{t_1}^{t}\left\{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}W(s)+H(t,s)[B(s)W(s)-A(s)W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)]\right\}\mathrm{d}s=$$

$$H(t,t_1)W(t_1)+$$

$$\int_{t_1}^{t}\left[-h(t,s)H^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t,s)W(s)-A(s)H(t,s)W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\right]\mathrm{d}s\le$$

$$H(t,t_1)W(t_1)+$$

$$\int_{t_1}^{t}\left[|h(t,s)|H^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t,s)W(s)-A(s)H(t,s)W^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\right]\mathrm{d}s$$

对上式利用引理 4 且注意到 $A(s)$ 的定义，有

$$\int_{t_1}^{t}H(t,s)\rho(s)Q(s)\mathrm{d}s\le H(t,t_1)W(t_1)+$$

$$\int_{t_1}^{t}\frac{\rho(s)r(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}|h(s,a)|^{\alpha+1}\mathrm{d}s$$

因此

$$\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left(H(t,s)\rho(s)Q(s)\int_{t_1}^{t}\frac{\rho(s)r(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}|h(s,a)|^{\alpha+1}\right)\mathrm{d}s\le$$

$$W(t_1),$$

上式与条件(17)矛盾。定理 3 成立。

参考文献:

[1] Hale J K. Theory of functional differential equations[M]. New York: Springer, 1977.

[2] 林丹玲.半线性中立型二阶时滞微分方程的振动准则[J].安徽大学学报,2015,39(1):15-20.

[3] Erbe L, Hassan T S, Peterson A. Oscillation of second order neutral delay differential equations[J]. Adv Dynamical Systems Appl, 2008, 3(1): 53-71.

[4] Liu H, Meng F, Liu P. Oscillation and asymptotic analysis on a new generalized Emden–Fowler equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(5): 2739-2748.

[5] 林文贤,俞元洪.高阶中立型时滞微分方程的振动准则[J].应用数学学报,2014,37(6):1018-1024.

[6] 林文贤. 具非线性扩散系数的偶数阶中立型偏泛函微分方程的振动性[J].井冈山大学学报:自然科学版,2014, 35(4):18-22.

[7] 林文贤. 振动性和周期解理论的研究[M]. 北京：国防工业出版社,2014.

[8] 林文贤. 具分布式偏差变元和阻尼项的中立型双曲方程的振动性[J].西南师范大学学报:自然科学版,2015,40(1):1-4.

[9] Philos C G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order[J]. Archiv der Mathematik, 1989, 53(5): 482-492.

[10] Hardy G H,Litterwood J E,Polya G．Inequalities(2nd Edition)[M].Cambridge:Cambridge University Press, 1952.