

文章编号: 1674-8085(2015)05-0021-03

平均弱局部一致凸及强端点在置换空间的提升

秦 璇, *苏雅拉图

(内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古, 呼和浩特 010022)

摘 要: 主要研究平均弱局部一致凸性及强端点从 Banach 空间 X_n 到置换空间 $P_X X_n$ 上的提升问题, 证明了这两种性质都可以在置换空间 $P_X X_n$ 上得到提升。

关键词: 置换空间; 平均弱局部一致凸; 强端点

中图分类号: O177.2

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2015.05.004

AVERAGE WEAK LOCAL UNIFORM CONVEXITY AND STRONGLY EXTREME POINTS IN SUBSTITUTION SPACE $P_X X_n$

QIN Xuan, *SUYA La-tu

(College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, huihot, Inner Mongolia 010022, China)

Abstract: We mainly research the lifting results of average weak local uniform convexity and strongly extreme points from Banach space X_n to substitution space $P_X X_n$. We also prove that these two convexities can be improved in substitution space $P_X X_n$.

Key words: substitution space; average weak local uniform convexity; strongly extreme point

2002 年, 白国仲在文献[1]中提出平均弱局部一致凸的概念, 此后, 包来友等对此性质在实值序列空间 $ces_p(x_k)$ 上做了研究, 得到了若每个 Banach 空间 x_k 是平均弱局部一致凸的, 则 Banach 序列空间 $ces_p(x_k)$ 也是平均弱局部一致凸的。1996 年, 王冬和崔云安在文献[2]中提出强端点的概念, 并得到了 Banach 序列空间 $l_p(E)$ 其单位球面上的点 $x_0 = (x_0(i))$ 为强端点的充分必要条件是 $x_0(i)/\|x_0(i)\|$ 是 Banach 空间 E 的单位球面的强端点的重要结论, 而置换空间作为一种重要的 Banach 空间, 许多性质在其上都有很大的研究价值^[3-7]。本文在文献[1-2]的基础上, 对平均弱局部一致凸及强端点两种性质在置换空间上做了提升, 得出了若 X 是局部一致凸的, 则置换空间 $P_X X_n$ 是平均弱局部一致凸的当且仅当每个 X_n 都是平均弱局部一致凸

的以及若 X 是局部一致凸空间, y 是 $S(P_X X_n)$ 的一个强端点当且仅当对每个 $y_n \neq 0$, z 是 $S(X_n)$ 的一个强端点两个主要结论。

1 定义及引理

定义 1.1^[8] 设 X 是有超正交基 $\{x_n\}$ 的 Banach 空间, $\{x_n\}$ 是 X 的一个基。称 $\{x_n\}$ 是 X 的超正交基, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \in X$, 则对 $|a_n| \leq |b_n|, n \in N$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X \text{ 且 } \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \right\|。$$

定义 1.2^[8] 设 X 是有超正交基 $\{x_n\}$ 的 Banach 空间, $\{X_n\}$ 是一列 Banach 空间, 令

收稿日期: 2015-06-03; 修改日期: 2015-08-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(11561053); 内蒙古师范大学人才工程基金项目(RCPY-2-2012-K-034)

作者简介: 秦 璇(1991-), 女, 山西朔州人, 硕士生, 主要从事 Banach 空间理论研究(E-mail:qinxuanjk@163.com);

*苏雅拉图(1959-), 男, 内蒙古镶黄旗人, 教授, 硕士生导师, 主要从事 Banach 空间理论研究(E-mail:suyila520@163.com)。

$$Y = P_X X_n = \left\{ y = (y_1, y_2, \mathbf{L}, y_n) : y_n \in X_n, n=1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n \in X \right\}$$

称空间 Y 为 $\{X_n\}$ 关于 X 的置换空间。如果在 Y 中赋予范数

$$\|Y\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n \right\|, y = (y_1, y_2, \mathbf{L}, y_n) \in Y,$$

则 Y 也是一个 Banach 空间。

定义 1.3^[1] Banach 空间 X 称为平均弱局部一致凸 (平均局部一致凸) 的, 如果对任意 $x \in S(X), \{x_n\} \in X$, 当 $\left\| \frac{x_n + x}{2} \right\| \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 时, 则有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x \xrightarrow{w} 0 (n \rightarrow \infty), \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \right).$$

定义 1.4^[2] $x_0 \in S(X)$ 称为强端点, 如果 $\{x_n, y_n\} \subset X$ 满足 $x_n + y_n = 2x_0, \|x_n\| \rightarrow 1, \|y_n\| \rightarrow 1$, 则 $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ 。

引理 1.1^[8] 设 X 是具有超正交基 $\{x_n\}$ 的 Banach 空间, 且 $\{x_n\}$ 的对偶序列 $\{x_n^*\}$ 是 X^* 的基, $y = (y_1, y_2, \mathbf{L}) \in P_X X, y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \mathbf{L}, y_n^{(k)}) \in P_X X_n, k \in N$, 则 $y^{(k)} \xrightarrow{w} y$ 当且仅当

- 1) 对每个 $n \in N, y_n^{(k)} \xrightarrow{w} y_n$;
- 2) $\{y^{(k)}\}$ 是有界的, 即存在 $M > 0$, 使对一切 $k \in N$, 均有 $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n^{(k)}\| x_n \right\| \leq M$ 。

引理 1.2^[8] 设 X 是局部一致凸的 Banach 空间且具有超正交基 $(x_n), y = (y_1, y_2, \mathbf{L}, y_n) \in P_X X_n,$

$y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \mathbf{L}, y_n^{(k)}) \in P_X X_n, k \in N$, 则 $y^{(k)} \rightarrow y$ 当且仅当

- 1) 对每个 $n \in N, y_n^{(k)} \rightarrow y_n$;
- 2) $\|y^{(k)}\| \rightarrow \|y\|$ 。

2 主要结果

定理 2.1 设 X 是局部一致凸的, 则置换空间 $P_X X_n$ 是平均弱局部一致凸的当且仅当每个 X_n 都是平均弱局部一致凸的。

证明 必要性。每个 $X_n (n=1, 2, \dots)$ 均可看做 $P_X X_n$ 的子空间, 故结论显然。

充分性。设 X_n 是平均弱局部一致凸的,

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S(P_X X_n), y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) \in P_X X_n,$
 $\|y\| = 1, \|y^{(k)}\| \rightarrow 1$ 。

当 $\|y + y^{(k)}\| \rightarrow 2$ 时, 证明

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^{(i)} - y \xrightarrow{w} 0 (n \rightarrow \infty)。$$

$$\text{令 } x = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n, x^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n^{(k)}\| x_n, x^{(k)} \in X,$$

$x \in S(X)$ 。对上述 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S(P_X X_n)$, 由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in S(P_X X_n)^*, f_n \in X_n^*$, 使得 $f(y) = 1$ 。

$$\text{令 } h = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| x_n^*, h \in S(X^*), \|h\| = \|f\| = 1,$$

$$\|x\| = \|y\| = 1. \text{ 由 } h(x) \leq \|h\| \cdot \|x\| = 1,$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \cdot \|y_n\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y_n) = f(y) = 1$$

$$\text{知 } h(x) = 1, \text{ 又 } h(x^{(k)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \cdot \|y_n^{(k)}\|,$$

$$h(x^{(k)}) \leq \|h\| \cdot \|x^{(k)}\| \leq 1, \text{ 知}$$

$$f(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y_n^{(k)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \cdot \|y_n^{(k)}\| = h(x^{(k)}) \leq 1$$

又 $f(y_n) \rightarrow f(y) = 1$, 从而 $h(x^{(k)}) \rightarrow 1 = h(x)$ 。由 X 的局部一致凸性, $x^{(k)} \rightarrow x$, 进而有

$$\|y_n^{(k)}\| \rightarrow \|y_n\|, n = 1, 2, \dots$$

也就是

$$\left\| \frac{y_n^{(k)}}{\|y_n\|} \right\| \rightarrow 1, n = 1, 2, \dots$$

因为 $\|y + y^{(k)}\| \rightarrow 2$, 即 $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + y_n^{(k)}\| x_n \right\| \rightarrow 2$, 也就是

$$\left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + y_n^{(k)}\| x_n}{2} \right\| \rightarrow 1, \quad (1)$$

$$\left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + y_n^{(k)}\| x_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n \right\| \leq$$

$$\left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + y_n^{(k)}\| x_n}{2} \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n \right\| =$$

$$\frac{\|y + y^{(k)}\|}{2} + \|y\| = \frac{\|y + y^{(k)}\|}{2} + 1 \rightarrow 2$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{y_n + y_n^{(k)}}{2} + y_n \right\| x_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{3}{2} y_n + \frac{1}{2} y_n^{(k)} \right\| x_n \right\| = \\
& \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{5}{2} (y_n + y_n^{(k)}) - y_n - 2y_n^{(k)} \right\| x_n \right\| \geq \\
& \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{5}{2} (y_n + y_n^{(k)}) \right\| x_n \right\| - \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| y_n \right\| x_n \right\| - \\
& \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| 2y_n^{(k)} \right\| x_n \right\| = \frac{5}{2} \|y + y^{(k)}\| - \|y\| - 2\|y^{(k)}\| \rightarrow 2 \\
& \text{从而} \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + y_n^{(k)}\| x_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n \right\| \rightarrow 2 \quad (2)
\end{aligned}$$

由式(1)、式(2)及 X 的局部一致凸性可知,

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n + y_n^{(k)}\| x_n}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n,$$

进而有 $\frac{1}{2} \|y_n + y_n^{(k)}\| \rightarrow \|y_n\|$, 即

$$\|y_n + y_n^{(k)}\| \rightarrow 2\|y_n\|$$

当 $y_n \neq 0$ 时, 有 $\left\| \frac{y_n}{\|y_n\|} + \frac{y_n^{(k)}}{\|y_n\|} \right\| \rightarrow 2$ 且 $\left\| \frac{y_n^{(k)}}{\|y_n\|} \right\| \rightarrow 1$ 。

由 X_n 是平均弱局部一致凸, 得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_n^{(i)}}{\|y_n\|} \xrightarrow{w} \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

从而 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_n^{(i)} \xrightarrow{w} y_n \quad (n \rightarrow \infty), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ 。

又 $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n^{(i)}\| x_n \right\| = \|y^{(i)}\| \leq 1$, 由引理 1.1 知,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^{(i)} \xrightarrow{w} y \quad (n \rightarrow \infty);$$

当 $y_n = 0$ 时, 据 $\|y_n + y_n^{(k)}\| \rightarrow 2\|y_n\|$ 显然有

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^{(i)} \xrightarrow{w} y \quad (n \rightarrow \infty)$, 从而 $P_X X_n$ 是平均弱局部一致凸的。

定理 2.2 设 X 是局部一致凸的, 则置换空间 $P_X X_n$ 是平均局部一致凸的当且仅当每个 X_n 是平均局部一致凸的。

证明 方法同定理 2.1。

定理 2.3 设 X 是局部一致凸空间, y 是 $S(P_X X_n)$ 的一个强端点当且仅当对每个 $y_n \neq 0$, $\frac{y_n}{\|y_n\|}$ 是 $S(X_n)$ 的一个强端点。

证明 必要性。设 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S(P_X X_n)$,

存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{y_{n_0}}{\|y_{n_0}\|}$ 不是 $S(X_{n_0})$ 的强端点, 即

存在 $\varepsilon_0 > 0, x_{n_0}^n, y_{n_0}^n \in X_{n_0}$, 满足:

- 1) $\frac{y_{n_0}}{\|y_{n_0}\|} = \frac{x_{n_0}^n + y_{n_0}^n}{2};$
- 2) $\|x_{n_0}^n\| \rightarrow 1, \|y_{n_0}^n\| \rightarrow 1;$
- 3) $\|x_{n_0}^n - y_{n_0}^n\| \geq \varepsilon_0 \quad (n=1, 2, \dots, \mathbf{L})。$

记

$$x^n = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, \|y_{n_0}\| x_{n_0}^n, x_{n_0+1}, \dots, \mathbf{L}),$$

$$y^n = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, \|y_{n_0}\| y_{n_0}^n, x_{n_0+1}, \dots, \mathbf{L}),$$

则 1) $y = \frac{x^n + y^n}{2};$

2) 因为 $\|y_{n_0} \cdot x_{n_0}^n\| \leq \|y_{n_0}\| \|x_{n_0}^n\| \rightarrow \|y_{n_0}\|$, 从而 $\|x^n\| \rightarrow 1, \|y^n\| \rightarrow 1, (n \rightarrow \infty);$

3) $\|x^n - y^n\| = \|x_{n_0}\|^2 \|x_{n_0}^n - y_{n_0}^n\| \geq \varepsilon_0 \|x_{n_0}\|^2 > 0$

这与 y 是强端点矛盾, 故 $\frac{y_{n_0}}{\|y_{n_0}\|}$ 是 $S(X_{n_0})$ 的强端点。

充分性。任取 x^k, y^k 满足:

- 1) $y = \frac{x^k + y^k}{2};$
- 2) $\|x^k\| \rightarrow 1, \|y^k\| \rightarrow 1;$

下证 y 是 $S(P_X X_n)$ 的强端点, 即

$$\|y^k - y\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)。$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^k\| = \|y_n\| \quad (k=1, 2, \dots)。$

令 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| x_n, x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n^k\| x_n,$

则 $\|x\| = \|y\| = 1, \|x^k\| = \|y_n^k\| \leq 1,$

又 $\|x + x^k\| \rightarrow 2$, 由 X 的局部一致凸性, $x^k \rightarrow x$, 进而有

$$\|y_n^k\| \rightarrow \|y_n\| \quad (n \rightarrow \infty)$$

记 $a_n^k = \frac{y_n^k}{\|y_n\|}, b_n^k = \frac{x_n^k}{\|y_n\|}, b^k = \frac{y_n}{\|y_n\|},$

则 $b^k = \frac{a_n^k + b_n^k}{2}$, 且 $\|a_n^k\| \rightarrow 1, \|b_n^k\| \rightarrow 1$, 由

于 $\frac{y_n}{\|y_n\|}$ 是强端点, 故有 $a_n^k \rightarrow b^k, b_n^k \rightarrow b^k。$

即 $y_n^k \rightarrow y_n, x_n^k \rightarrow y_n$, 又 $\|y^k\| \rightarrow 1 = \|y\|$, 由引理 1.2 得 $\|y^k - y\| \rightarrow 0$, 故 y 是 $S(P_X X_n)$ 的强端点。

(参考文献[1]-[8]转第 47 页)

参考文献:

- [1] Dadwal M, Ostwal M M, Liu P K T, et al. Adsorption of arsenic on conditioned layered double hydroxides: Column experiments and modeling[J]. Ind Eng Chem Res, 2009, 48 (4): 2076-2084.
- [2] Veronica M, Graciela B, Noema A, et al. Ethanol steam reforming using Ni(II)-Al(III)layered double hydroxide as catalyst precursor kinetic study[J]. Chem Eng J, 2008, 138(1-3): 602-607.
- [3] Bhaumik A, Samanta S, Mal N K. Efficient removal of arsenic from polluted ground water by using a layered double hydroxide exchanger[J]. Indian J Chem, 2005, 44(7): 1406-1409.
- [4] 袁秋兰,吴晓莉,张智军. Mg/Al/Cu 类水滑石焙烧产物对茜素黄 GG 的吸附[J]. 三明学院学报, 2013, 30(4):31-34.
- [5] Zhu M X, Li Y P, Xie M, et al. Sorption of an anionic dye by uncalcined and calcined layered double hydroxides: a case study[J]. Journal of Hazardous Materials, 2005, 120(1-3): 163-171.
- [6] 朱茂旭,王征,李艳苹,等. 水滑石及其焙烧产物对阴离子染料酸性蓝-80 的吸附[J]. 环境化学, 2007, 26(3): 371-375.
- [7] 王巧巧,倪哲明,张峰,等. 镁铝二元水滑石的焙烧产物对染料废水酸性红 88 的吸附[J]. 无机化学学报, 2009, 25(12): 2156-2162.
- [8] 陈文通,曾锡瑞,陈华龙,等. $[\text{Nd}(\text{H}_2\text{O})_4(\text{NO}_3)_3] \cdot (4,4'\text{-bipy})_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ 的合成、晶体结构和荧光[J]. 井冈山大学学报:自然科学版, 2010, 31(1):36-39.
- [9] 谭群英,胡启阳,王志兴,等. 以 Ni-Mn 水滑石为前驱体制备 $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{0.5}\text{O}_2$ 及锂过量对其性能的影响[J]. 功能材料, 2009, 40(3): 403-406.
- [10] Hansen B, Curtius H, Odoj R. Synthesis of a Mg-Cd-Al layered double hydroxide and sorption of selenium[J]. Clays and Clay Minerals, 2009, 57(3): 330-337.

(上接第 23 页)

参考文献:

- [1] 白国仲. Banach 空间的平均一致凸性与光滑性[J]. 华中师范大学学报, 2002, 36(4):416-418.
- [2] 王冬,崔云安. Banach 序列空间的强端点[J]. 东北师大学报:自然科学版, 1996(1):13-16.
- [3] 南朝勋. $l^p(X_i)$ 的凸性[J]. 数学杂志, 1998, 8(2): 191-196.
- [4] 束立生,王建华. 置换空间 $P_X X_n$ 的一些性质[J]. 南京大学学报数学半年刊, 1994, 11(1):50-58.
- [5] Leonard I E. Banach sequence spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1976, 54(1): 245-265.
- [6] 林尤武,魏文展,唐献秀,等. 局部凸空间的平均局部一致凸性和一致光滑性[J]. 广西科学, 2011, 18(3): 201-206.
- [7] 陈利国,罗成. 关于局部凸空间的中点局部一致凸性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(6):749-755.
- [8] 束立生,李刚. 置换空间 $P_X X_n$ 中几种凸性的提升[J]. 扬州大学学报, 1998, 1(2):10-12.