

文章编号: 1674-8085(2015)04-0013-04

# 一类具有饱和传染率、免疫接种和垂直传染的 SIR 传染病模型的全局稳定性分析

朱春娟

(韶关学院数学与统计学院, 广东, 韶关 512005)

**摘 要:** 针对一类具有饱和传染率、免疫接种和垂直传染的 SIR 传染病模型, 确定了疾病的基本再生数。得出结论: 当疾病的基本再生数小于 1 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的, 当疾病基本再生数大于 1 时, 地方病平衡点是全局渐近稳定的。

**关键词:** SIR 传染病模型; 饱和传染率; 免疫接种; 垂直传染; 稳定性

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2015.04.003

## GLOBAL STABILITY OF A SIR EPIDEMIC MODEL WITH SATURATING INFECT RATE,VACCINATION AND VERTICAL TRANSMISSION

ZHU Chun-juan

(College of Mathematics and Statistics, Shaoguan University, Shaoguan, Guangdong 512005, China)

**Abstract:** In this paper, the SIR epidemic model with saturating infect rate, vaccination and vertical transmission is studied; the basic reproduction number  $R_0$  for the existence of infective disease was established. If  $R_0 < 1$ , the disease-free equilibrium is global asymptotically stable. If  $R_0 > 1$ , a unique endemic equilibrium exists and is globally stable in the interior of the feasible region. We discuss the biological significance at the end.

**Key words:** SIR epidemic model; saturating infect rate; vaccination; vertical transmission; equilibrium; global stability

### 0 引言

传染病在现实生活中广泛存在, 利用动力学方法来研究传染病是非常重要的方法之一<sup>[1-3]</sup>。在文献[4-9]中研究关于垂直传染的传染病模型, 这里认为若新生儿的母亲为染病者, 而新生儿却不能接种, 但事实上, 有些是可以接种的, 譬如乙肝等。

在经典的传染病模型中, 对传染率的刻画基本上采用双线性型  $\beta SI$  和标准型  $\beta \frac{SI}{N}$ 。实际上, 双线性型和标准型只是两种极端的情形, 在它们之间,

还有更符合实际的饱和接触率。在传统的流行病模型中, 通常假设平均每个染病者在单位时间内可与  $\beta N$  的该种群的其他成员进行有效接触, 其中  $N$  表示种群的总规模, 但是单位时间内每个生物的活动能力总是有限的, 因而接触率不会随着种群规模的无限增大而增大, 而应该逐渐趋于一个饱和状态。在对 1973 年发生在巴里的霍乱疫情研究之后, Capasso and Serio 在传染病模型中引进了饱和传染率  $g(I)S$ <sup>[10]</sup>。

基于上述考虑, 本文研究了更符合实际生物情况的具有饱和传染率、免疫接种和垂直传染的 SIR

收稿日期: 2015-04-08; 修改日期: 2015-05-24

基金项目: 韶关市科技计划项目 (2014CX/K231)

作者简介: 朱春娟(1982-), 女, 江苏南通人, 讲师, 硕士, 主要从事生物数学方向研究(zcjyangyang.sina.com)。

传染病模型。

## 1 模型的建立

为了更符合实际,我们建立的模型中有带有免疫接种的常数输入者,且考虑垂直传染。我们主要讨论以下模型:

$$\begin{cases} S'(t) = (1-m)S_0 + b(1-m)(S+R+pI) - dS - \frac{\beta SI}{1+\alpha I} \\ I'(t) = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} + qbI - (d+\gamma+e)I \\ R'(t) = \gamma I + mb(S+R+pI) - dR + mS_0 \end{cases} \quad (1)$$

$S_0 (S_0 > 0)$  是对总人口输入项的人数并且假设输入者均为易感者;  $m$  是对没有被感染的易感者的免疫接种率;  $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$  为染病者与易感者的发生率;  $\beta$  为传染率;  $\frac{1}{1+\alpha I}$  表示易感者采取措施施以抑制传染力;  $b, d$  分别为自然出生率和自然死亡率,并且我们假设  $b < d$ ,  $\beta \geq \alpha\gamma$  是恢复系数,  $q(p+q=1)$  是母体为染病的新生儿的垂直传染系数;  $e$  为因病死亡率。

由于  $N = S + I + R$ , 则总人口方程为

$$N'(t) = S_0 + (b-d)N - eI \quad (2)$$

结合 (2), 系统 (1) 等价于系统

$$\begin{cases} I'(t) = \frac{\beta(N-I-R)I}{1+\alpha I} + [qb - (d+\gamma+e)]I \\ R'(t) = \gamma I + mb(N-qI) - dR + mS_0 \\ N'(t) = S_0 + (b-d)N - eI \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{令 } W = \{(I, R, N) \mid I \geq 0, R \geq 0, R+I \leq N \leq \frac{S_0}{d-b}\},$$

显然, 系统 (3) 为有界系统, 考虑到系统的实际意义, 各类初值都在  $W$  内, 即  $W$  是系统 (1) 的正向不变集, 以下考虑系统 (3)。

利用再生矩阵的方法, 可以得到系统 (3) 的基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta S_0 (d-mb)}{d(d-b)(d+\gamma+e-qb)}$$

## 2 平衡点的存在性

**定理 1** 系统 (3) 始终存在无病平衡点

$P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$ , 当且仅当  $R_0 > 1$  时, 系统 (3) 同时存在惟一的地方病平衡点  $P^*(I^*, R^*, N^*)$ , 这里

$$I^* = \frac{S_0 + (b-d)N^*}{e},$$

$$R^* = \frac{[mb + \frac{(\gamma-mbq)(b-d)}{e}]N^* + (m + \frac{\gamma-mbq}{e})S_0}{d}$$

$N^*$  是方程

$$g(N) = \beta(N - \frac{S_0 + (b-d)N}{e} - \frac{[mb - \frac{(\gamma-mbq)(b-d)}{e}]N + (m + \frac{\gamma-mbq}{e})S_0}{d}) + [qb - (d+\gamma+e)](1+\alpha \frac{S_0 + (b-d)N}{e}) = 0$$

在区域  $(0, \frac{S_0}{d-b})$  内的惟一解。

**证明:** 显然  $P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$  是系统 (3) 的无病平衡点。地方病平衡点由系统 (3) 决定, 得到

$$I = \frac{S_0 + (b-d)N}{e},$$

$$R = \frac{[mb + \frac{(\gamma-mbq)(b-d)}{e}]N + (m + \frac{\gamma-mbq}{e})S_0}{d} \quad (4)$$

把 (4) 代入系统 (3) 的第一个方程得

$$\beta(N - \frac{S_0 + (b-d)N}{e} - \frac{[mb - \frac{(\gamma-mbq)(b-d)}{e}]N + (m + \frac{\gamma-mbq}{e})S_0}{d}) = [(d+\gamma+e)-qb](1+\alpha \frac{S_0 + (b-d)N}{e}) = 0$$

定义

$$g(N) = \beta(N - \frac{S_0 + (b-d)N}{e} - \frac{[mb - \frac{(\gamma-mbq)(b-d)}{e}]N + (m + \frac{\gamma-mbq}{e})S_0}{d}) + [qb - (d+\gamma+e)](1+\alpha \frac{S_0 + (b-d)N}{e})$$

则

$$g'(N) = \beta(1 - \frac{mb}{d} - \frac{(d+r-mbq)(b-d)}{ed}) + [qb - (d+\gamma+e)] \frac{\alpha(b-d)}{e}$$

因为  $b < d, 0 < m < 1, 0 < q < 1$ , 则

$$mb/d < 1, d-mbq > 0, b-d < 0, qb-d < 0,$$

所以  $g'(N) \geq 0$ , 故  $g(N)$  是关于  $N$  的单调不减函数。

由于

$$g(0) = -\frac{\beta(d+em+\gamma-mbq)}{ed} +$$

$$[qb - (d+\gamma+e)](1 + \frac{\alpha S_0}{e}) < 0;$$

$$g(\frac{S_0}{d-b}) = \frac{\beta S_0(d-mb)}{d(d-b)} - (d+\gamma+e-qb) = \frac{1}{d+\gamma+e-qb}(R_0-1),$$

所以当  $R_0 > 1$  时,  $g(\frac{S_0}{d-b}) > 0$ 。于是当  $R_0 > 1$ ,

方程  $g(N) = 0$  在区间  $(0, S_0/(d-b))$  上只有一个正解  $N^*$ 。

**定理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点

$P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$  是局部渐近稳定的; 当  $R_0 > 1$  时,

地方病平衡点  $P^*(I^*, R^*, N^*)$  是局部渐近稳定的, 无病平衡点是不稳定的。

### 3 平衡点的全局稳定性

**定理 3** 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点

$P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$  是全局渐近稳定的。

**证明** 由于  $N'(t) = S_0 + (b-d)N$ , 得

$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{S_0}{d-b}$ 。系统(2)的极限方程为

$$\begin{cases} I'(t) = \frac{\beta I}{1+\alpha I}(\frac{S_0}{d-b} - R - I) - (d+r+e-qb)I = P_1(I, R) \\ R'(t) = rI + mb(\frac{S_0}{d-b} - qI) - dR + mS_0 = Q_1(I, R) \end{cases} \quad (5)$$

显然, 区域  $\Omega = \{(I, R) | I \geq 0, R \geq 0, I+R \leq \frac{S_0}{d-b}\}$

是系统(5)的正向不变集。

构造 Dulac 函数  $B(I, R) = \frac{1}{IR}$ , 则

$$\frac{\partial(BP_1)}{\partial I} = -\frac{\alpha\beta}{R(1+\alpha I)^2}(\frac{S_0}{d-b} - R - I) -$$

$$\frac{\beta}{R(1+\alpha I)} < 0,$$

$$\frac{\partial(BQ_1)}{\partial R} = -\frac{\beta}{R^2} - \frac{mb}{IR^2}(\frac{S_0}{d-b} - qI) - \frac{mS_0}{IR^2} < 0$$

所以  $\frac{\partial(BP_1)}{\partial I} + \frac{\partial(BQ_1)}{\partial R} < 0$ , 所以系统(5)在  $\Omega$  内

无极限环。因为, 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点

$P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$  是局部稳定的, 则由

Bendixson-Dulac 判别法知, 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡

点  $P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$  是全局渐近稳定的。

**定理 4** 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点

$P^*(I^*, R^*, N^*)$  是全局渐近稳定的。

**证明** 构造 Dulac 函数  $B(I, R, N) = \frac{1}{IRN}$ , 令

$$\begin{cases} I'(t) = \frac{\beta(N-I-R)}{1+\alpha I}I + qhI - (d+r+e)I = P_2(I, R, N) \\ R'(t) = rI + mb(N-qI) - dR + mS_0 = Q_2(I, R, N) \\ N'(t) = S_0 + (b-d)N - eI = S_2(I, R, N) \end{cases}$$

则

$$\frac{\partial(BP_2)}{\partial I} = -\frac{\beta(1+\alpha I) + \alpha(N-I-R)}{RN(1+\alpha I)^2} < 0,$$

$$\frac{\partial(BQ_2)}{\partial R} = -\frac{rI + mbN + mbqI + mS_0}{RNI^2} < 0,$$

$$\frac{\partial(BS_2)}{\partial N} = -\frac{S_0 - eI}{RNI^2} < 0,$$

所以  $\frac{\partial(BP_2)}{\partial I} + \frac{\partial(BQ_2)}{\partial R} + \frac{\partial(BS_2)}{\partial N} < 0$ , 因此, 在  $W$

内不存在极限环。又因为系统(2)的一切正解最终有界。当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $P^*(I^*, R^*, N^*)$  是局

部渐近稳定的, 无病平衡点  $P_0(0, \frac{mS_0}{d-b}, \frac{S_0}{d-b})$  是

不稳定的, 由 Bendixson-Dulac 判别法知,  $P^*(I^*, R^*, N^*)$  是全局渐近稳定的。

#### 4 模型的生物意义

本文讨论了免疫接种和垂直传染对流行病的影响, 得出: 当  $R_0 < 1$  时, 疾病将消除; 当  $R_0 > 1$  时, 地方病将流行。故接种参数  $m$  对控制  $R_0$  至关重要。所以加大对新生儿的接种率, 疾病就会消除, 如果还是坚持以往的观点, 继续认为母体染病的新生儿不能接种, 那疾病就会继续蔓延下去。同时由  $R_0$  得定义可得,  $m_c = 1 - \frac{(d-b)(d+\gamma+e-qb)}{\beta S_0}$ , 将其定义为疾病根除的理想接种覆盖水平, 它表明, 当  $m > m_c$  时,  $R_0 < 1$ , 疾病将被根除。此外,  $m_c$  是关于恢复系数  $\gamma$  的单调递减函数, 因此加强对疾病的研究, 提高治愈率, 可以减小  $m_c$ , 对疾病是否能根除至关重要。

#### 参考文献:

- [1] 马知恩, 周义仓, 王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] Zhou J, Hethcote H W. Population size dependent incidence in models for diseases without immunity[J]. Journal of mathematical biology, 1994, 32(8): 809-834.
- [3] 靳祯, 潘晋孝. 具有连续预防接种的流行病模型研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2001, 9(2-3): 120-124.
- [4] 张芷芬, 丁同仁, 黄文社, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [5] Fine P E M. Vectors and vertical transmission: an epidemiologic perspective[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1975, 266(1): 173-194.
- [6] Busenberg S N, Cooke K L. The population dynamics of two vertically transmitted infections[J]. Theor Popul Biol, 1988, 33(2): 181-198.
- [7] El-Doma M. Analysis of a general age-dependent vaccination transmitted disease [J]. Nonlinear times and digest, 1995 (2): 147-170.
- [8] Li X Z, Zhou L L. Global stability of an SEIR epidemic model with vertical transmission and saturating contact rate[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40(2): 874-884.
- [9] Korobeinikov A. Lyapunov functions and global properties for SEIR and SEIS epidemic models[J]. Mathematical Medicine and Biology, 2004, 21(2): 75-83.
- [10] Capasso V, Serio G A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model[J]. Mathematical Biosciences, 1978, 42(1): 43-61.