文章编号：1674-8085(2015)04-0007-06

关于三参数 Pareto 分布的参数估计问题

*刘荣玄 [1]，邬四英 [1]，张　萍 [2]

（1.井冈山大学数理学院，江西，吉安　343009 ；2.井冈山大学继续教育学院，江西，吉安　343000）

摘　要：在逐步增加首失效截尾样本下，研究三参数 Pareto 分布族形状参数的一致最小方差无偏估计（UMVUE），在对称平方损失函数下，讨论其 Bayes 估计和参数型经验 Bayes（PEB）估计；按照均方误差（MSE）准则，比较 UMVUE 与 PEB 估计的小样本性质；根据形状参数的风险，导出其 Bayes 估计与 PEB 估计的大样本性质，并获得它们的收敛速度$o(n^{-1})$。

关键词：首失效截尾样本；三参数 Pareto 分布；UMVUE 与 PEB 估计；样本性质

中图分类号：O212.8　　**文献标识码：**A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2015.04.002

ESTIMATION OF THREE-PARAMETER PARETO DISTRIBUTION UNDER PROGRESSIVELY FIRST-FAILURE-CENSORED DATA

*LIU Rong-xuan[1], WU Si-ying[1], ZHANG Ping[2]

(1.School of Maths and Physics, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China；

2. School of Continuing Education, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343000, China)

Abstract: We derive the uniformly minimum variance unbiased estimation (UMVUE) of shape parameter of the three-parameter Pareto distribution family based on progressive first-failure-censoring samples. Furthermore, the Bayesian estimation and the parameter-type empirical Bayes (PEB) estimation have been obtained under the symmetric loss function. The small sample properties of UMVUE and the PEB estimation are compared under the mean- square error (MSE) criterion. The large sample properties of the Bayesian estimation and the PEB estimation of the parameters are proved according to the risk of the shape parameter and the convergence rate $o(n^{-1})$ is obtained. The interval estimations of the parameters in classical statistics and Bayesian statistics are discussed respectively under the same or similar credible level. At last, the precision of the Bayesian interval estimation is better than in classical statistics is illustrated by some numerical simulation results.

Key words: first-failure-censoring samples; three-parameter Pareto distribution; UMVUE and PEB estimation; sample properties

自 1897 年意大利经济学家 VilfredoPareto (1848-1923)提出 Pareto 分布后[1]，经过一个多世纪的发展，Pareto 分布得到了推广，由二参数 Pareto 分布推广到三参数 Pareto 分布和广义 Pareto 分布，并广泛地应用于诸多领域，解决实际问题。Pareto 分布参数估计问题的研究也取得了诸多成果。文献[2]在平方损失函数下研究了二参数 Pareto 分布形状参数的渐进最优与可容许的经验 Bayes 估计及其性质；文献[3]在平方损失函数和 LINEX 损失函数下研究了 二参数 Pareto 分布形状参数和可靠性

收稿日期：2015-03-29；修改日期：2015-04-25
基金项目：江西省教育科学规划项目(12YB049).
作者简介：*刘荣玄(1959-)，男，江西遂川人，副教授，主要从事概率统计及贝叶斯统计的教学与研究(E-mail:lrx8231901@163.com);
邬四英(1970-)，女，江西吉安人，统计师，主要从事统计工作(E-mail:lrx3536454@163.com);
张　萍(1960-)，女，山东济南人，馆员，主要从事档案工作(E-mail:lis8881716@aliyun.com).

指标的 Bayes 估计；文献[4]在与信息论中的熵函数有关的 q-对称熵损失函数下研究了 Pareto 分布形状参数的最小风险同变估计、Bayes 估计以及可容许与不可容许估计，并给出了形状参数的一个最小最大估计；文献[5]将两参数的情形推广到三参数，并研究了尺度参数和形状参数估计的渐近性质，指出多数的形状参数具有接近于最小的偏差和均方误差的特点。本文基于逐步增加首失效截尾样本研究三参数 Pareto 分布参数估计问题。

在可靠性寿命试验中，截尾试验是一类应用非常广泛的试验，随着科学技术的发展，产品寿命不断提高，实验成本越来越大，实验时间也越来越长，针对实际问题，研究者对传统的定数截尾和定时截尾寿命实验进行了改进，提出了逐步增加截尾实验，文献[6-7]讨论了正态样本下逐步增加截尾数据下参数的似然估计和区间估计； Balakrishnan 和 Aggarwala [8]对寿命试验和逐步截尾寿命试验进行了统计分析。然而对于高寿命产品，逐步增加截尾试验仍然比较费时，成本偏高。2009 年 Wu 和 Kus[9]提出了逐步增加首失效截尾寿命试验，这种试验既可以了解产品的失效机理，又能了解产品的退化情况，还可以节约时间和成本。目前利用这种试验获取样本，研究分布函数参数估计的文献并不多见。文献[10]基于逐步增加首失效截尾样本，在对称和非对称损失函数下研究了 Burr 分布可靠性指标的 Bayes 估计。本文采用该种试验获取样本，在对称平方损失函数下，研究三参数 Pareto 分布参数的 UMVUE、PEB 估计和区间估计，以及估计的小样本性质、大样本性质和区间估计的精度。

设三参数 Pareto 分布的密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\alpha^{\frac{1}{\theta}}(t-\mu)^{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)} & t\ge\alpha+\mu\ ,\\ 0 & t<\alpha+\mu\ .\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\alpha>0$，$\theta>0$，$-\infty<\mu<+\infty$，α 为尺度参数，θ 为形状参数，μ 为位置参数，并假设为已知常数，记为 $T\sim Pareto(\alpha,\theta,\mu)$。显然密度函数（1）是单调递减的。

逐步增加首失效截尾样本试验是指：假设有 n 个独立的实验组，每组有 s 个相互独立的样品，将这 n 个实验组中的所有样品同时投入实验，当第一个失效样品出现时，记录失效时间 $T_{1:l:n:s}$，其中 l 为事先规定的实验终止时失效样品的个数，并移去含失效样品组在内的 R_1+1 个试验组；当第二个失效样品出现时，记录失效时间 $T_{2:l:n:s}$，再移去含失效样品组在内的 R_2+1 个实验组；依此类推，直至第 l 个失效样品出现为止，记录失效时间 $T_{l:l:n:s}$，并将剩余的含失效样品组在内的 R_l+1（$R_l=n-l-R_1-R_2-\cdots-R_{l-1}$）个实验组移去。显然，当 $s=1,\ l=n, R=(R_1,R_2,\cdots,R_l)=(0,0,\cdots,0)$ 时，该实验为完全样本试验；当 $s=1,\ R=(0,0,\cdots,0,n-l)$ 时，实验为定数截尾实验；当 $s=1,\ R=(R_1,R_2,\cdots,R_l)$ 时，实验为逐次截尾实验。

为书写方便，我们记 $T_{i:l:n:s}=T_i$，$i=1,2,\cdots,\ l$，令 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_l)$ 表示为来自 Pareto 分布（1）的逐步增加首失效截尾样本。

引理 1 假设 $T\sim Pareto(\alpha,\theta,\mu)$，令 $Y=\ln(T-u)-\ln\alpha$，则 $Y\sim Exp(\theta^{-1})$。

证明 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\ln(T-u)-\ln\alpha\le y)=P\left(T\le e^{y+\ln\alpha}+u\right)$。

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=f\left(e^{y+\ln\alpha}+u\right)e^{y+\ln\alpha}=$

$$\frac{1}{\theta}\alpha^{\frac{1}{\theta}}\left(e^{-\frac{1}{\theta}(y+\ln\alpha)}\right)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}。$$

引理 2 假设 $T_1\le T_2\le\cdots\le T_l$ 是一列来自三参数 $T\sim Pareto(\alpha,\theta,\mu)$ 总体，容量为 ns 的逐步增加首失效截尾样本，则 $Y_1\le Y_2\le\cdots\le Y_l$ 是一列由样本 $T_1\le T_2\le\cdots\le T_l$ 生成的，来自指数分布 $Y\sim Exp(\theta^{-1})$ 总体，容量为 ns 的逐步增加首失效截尾样本，令 $Z=\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)s\ln(t_i-u)-ns\ln(T_1-u)$， 则有 $Z\sim\Gamma(r,\theta^{-1})$，其中 $r=l-1$。

证明 根据指数经典变换

$$\begin{cases}Z_1=nsY_1\\ Z_2=(n-R_1-1)s[Y_2-Y_1]\\ \quad\vdots\\ Z_l=(n-R_1-\cdots-R_{l-1}-l+1)s[Y_l-Y_{l-1}]\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} Y_1 = Z_1/ns \\ Y_2 = Z_2/(n-R_1-1)s + Z_1/ns \\ \quad\vdots \\ Y_l = Z_l/(n-R_1-\cdots-R_{l-1}-l+1)+\cdots+Z_1/ns \end{cases}$$

假设随机向量$(z_1,z_2,\cdots,z_l)$和$(y_1,y_2,\cdots,y_l)$的联合密度函数分别为$g(z_1,z_2,\cdots,z_l)$和$g_Y(y_1,y_2,\cdots,y_l)$，则有

$$g(z_1,z_2,\cdots,z_l)=|J|g_Y(y_1,y_2,\cdots,y_l)，而$$

$$|J|=\begin{vmatrix} 1/ns & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 \\ 1/ns & 1/(n-R_1-1)s & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/ns & 1/(n-R_1-1)s & \cdots & 1/(n-R_1-\cdots-R_{l-1}-l+1)s & & & \end{vmatrix}=\frac{1}{ns(n-R_1-1)s\cdots(n-R_1-\cdots-R_{l-1}-l+1)s}$$

$$g_Y(y_1,y_2,\cdots,y_l)=cs^l\prod_{i=1}^{l}f_Y(y_i)[1-F_Y(y_i)]^{s(R_i+1)-1}=cs^l\theta^{-l}e^{-\theta^{-1}\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)sy_i},$$

其中

$$c=n(n-R_1-1)(n-R_1-R_2-2)\cdots(n-R_1-R_2-\cdots-R_{l-1}-l+1)$$

从而

$$g(z_1,z_2,\cdots,z_l)=\frac{cs^l}{ns(n-R_1-1)s\ \cdots\ (n-R_1-\cdots-R_{l-1}-l+1)s}\cdot\theta^{-l}e^{-\theta^{-1}\sum_{i=1}^{l}z_i}=\theta^{-l}e^{-\theta^{-1}\sum_{i=1}^{l}z_i} \tag{2}$$

所以$Z_1,Z_2,\cdots,Z_l$独立同分布于$Exp(\theta^{-1})$。

又因为

$$Z=\sum_{i=2}^{l}Z_i=\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)sY_i-nsY_1=\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)s\ln(T_i-u)-ns\ln(T_1-u),$$

根据伽玛分布的有限可加性知

$$Z\sim\Gamma(r,\ \theta^{-1}) \tag{3}$$

由式(2)及因子分解定理可知，$Z=\sum_{i=2}^{r+1}Z_i$是参数θ的充分统计量。

又由于 Pareto 分布族是完备的，因此Z还是θ的完备统计量，从而可知$Z=\sum_{i=2}^{r+1}Z_i$是θ的充分完备统计量。

1 参数估计

1.1 参数的 UMVUE

设 $T_1\le T_2\le\cdots\le T_l$ 是一列来自总体$T\sim Pareto(\alpha,\theta,\mu)$的逐步增加首失效截尾样本，其似然函数为

$$L(\alpha,\theta,\mu)=cs^l\prod_{i=1}^{l}f(t_i)[1-F(t_i)]^{s(R_i+1)-1}=$$

$$cs^l\prod_{i=1}^{l}\frac{1}{\theta}\alpha^{\frac{1}{\theta}}(t_i-\mu)^{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}\left[\alpha^{\frac{1}{\theta}}(t_i-\mu)^{-\frac{1}{\theta}}\right]^{s(R_i+1)-1}=$$

$$cs^l\theta^{-l}\alpha^{\theta^{-1}s\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)}\prod_{i=1}^{l}(t_i-\mu)^{-\theta^{-1}s(R_i+1)-1},$$

相应的对数似然函数为

$$\ln L(\alpha,\theta,\mu)=\ln c+l\ln s-l\ln\theta+\frac{1}{\theta}s\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)\ln\alpha-\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{\theta}s(R_i+1)+1\right)\ln(t_i-\mu)$$

对θ求导并令其等于零

$$\frac{\partial\ln L(\alpha,\theta,\mu)}{\partial\theta}=-\frac{l}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}s\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)(\ln\alpha-\ln(t_i-\mu))=0$$

$$\theta=\frac{1}{l}\left[\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)s\ln(t_i-\mu)-ns\ln\alpha\right]$$

于是可得参数的极大似然估计为

$$\hat\theta_M=\frac{Z}{l}, \tag{4}$$

$$\hat\alpha_M=T_1-\mu, \tag{5}$$

其中 $Z=\sum_{i=1}^{l}(R_i+1)s\ln(t_i-u)-ns\ln(T_1-\mu)$。

引理 3 令$\hat\theta_u=\frac{l}{r}\hat\theta_M$，则$\hat\theta_u$是参数$\theta$的 UMVUE。

证明

$$E(\hat\theta_u)=E\left(\frac{Z}{r}\right)=\frac{1}{r}\int_0^\infty z\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}z^{r-1}e^{-\frac{z}{\theta}}dz=\frac{1}{r}\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(r+1)}{\theta^{-(r+1)}}=\theta$$

$$E\left(\hat{\theta}_u^2\right)=E\left(\frac{Z}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}E\left(z^2\right)=$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(r+2)}{\theta^{-(r+2)}}=\frac{(r+1)}{r}\theta^2=\frac{r+1}{r}\theta^2$$

$$Var\left(\hat{\theta}_u\right)=E\left(\hat{\theta}_u^2\right)-\left[E\left(\hat{\theta}_u\right)\right]^2=\frac{r+1}{r}\theta^2-\theta^2=\frac{1}{r}\theta^2<\infty。$$

综上所述，Z 是 θ 的充分完备统计量，$\hat{\theta}_u$ 是参数 θ 的无偏估计，且 $Var\left(\hat{\theta}_u\right)<\infty,\forall\theta>0$，根据 Lehmann-Scheffe 定理可知，$\hat{\theta}_u$ 是参数 θ 的 UMVUE。

1.2 参数的 Bayes 估计

设参数 θ 的共轭先验分布为逆伽玛分布

$$\pi(\theta)=\frac{\rho^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{-(\beta+1)}e^{-\rho/\theta},\theta>0,\beta>0,\rho>0 \tag{6}$$

其中 β,ρ 为超参数。则参数 θ 的后验分布为

$$h(\theta|z)\propto f(z|\theta)\pi(\theta)=$$

$$\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}z^{r-1}e^{-\theta^{-1}z}\frac{\rho^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{-(\beta+1)}e^{-\rho/\theta}\propto\theta^{-(\beta+r+1)}e^{-(\rho+z)/\theta},$$

即

$$\theta|z\sim \mathrm{I\Gamma}(r+\beta,\rho+z) \tag{7}$$

假设损失函数为

$$L(d,\delta)=(d-\theta)^2 \tag{8}$$

其中 $d=d(z)$ 是样本函数，也称 θ 的判决函数，则在平方损失(8)下，参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_{BE}=E(\theta|z)=$$

$$\int_0^\infty\theta\frac{(\rho+z)^{r+\beta}}{\Gamma(r+\beta)}\theta^{-(r+\beta+1)}e^{-(\rho+z)/\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\rho+z}{r+\beta-1} \tag{9}$$

其 Bayes 风险为

$$R_B=E_{(z,\theta)}\left(\hat{\theta}_{BE}-\theta\right)^2=E_{(z,\theta)}\left(\frac{\rho+z}{r+\beta-1}-\theta\right)^2=$$

$$\frac{\rho^2+E\left(z^2\right)+(r+\beta-1)^2E\left(\theta^2\right)+2\rho E(z)-2\rho(r+\beta-1)E(\theta)-2(r+\beta-1)E_{(z,\theta)}(z\theta)}{(r+\beta-1)^2}$$

由引理 2 和(6)式可知

$$E(z)=\int_0^\infty\int_0^\infty zf(z|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty z\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}z^{r-1}e^{-z/\theta}\frac{\rho^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{-(\beta+1)}e^{-\rho/\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\frac{\rho r}{\beta-1} \tag{10}$$

$$E\left(z^2\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty z^2\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}z^{r-1}e^{-z/\theta}\frac{\rho^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{-(\beta+1)}e^{-\rho/\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=$$

$$\frac{\rho^2(r+1)r}{(\beta-1)(\beta-2)}, \tag{11}$$

$$E_{(Z,\theta)}(z\theta)=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty z\theta\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}z^{r-1}e^{-z/\theta}\frac{\rho^\beta}{\Gamma(\beta)}\theta^{-(\beta+1)}e^{-\rho/\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=$$

$$\frac{\rho^2r}{(\beta-1)(\beta-2)} \tag{12}$$

$$E(\theta)=\frac{\rho}{(\beta-1)},\quad E\left(\theta^2\right)=\frac{\rho^2}{(\beta-1)(\beta-2)} \tag{13}$$

将(10)、(11)、(12)、(13)五式全部代入 Bayes 风险 R_B 中，有

$$R_B=\frac{\rho^2}{(r+\beta-1)(\beta-1)(\beta-2)} \tag{14}$$

如果超参数存在未知情况，我们可用历史样本，采用点估计法对参数进行估计，进而得到参数 θ 的 PEB 估计。

1.3 参数的 PEB 估计

假设超参数 β 已知，ρ 未知，$(Z_1,\theta_1),(Z_2,\theta_2),\cdots,(Z_n,\theta_n),(Z_{n+1}=Z,\theta)$ 为一串独立同分布的随机向量，$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n,Z_{n+1}$ 是可观测的有共同边缘概率密度的历史样本，Z_{n+1} 为当前样本，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 和 θ 为不可观测的，但有相同的先验分布。

由（10）式知

$$E(Z)=\frac{\rho r}{\beta-1} \tag{15}$$

设 $\bar{Z}$ 为样本均值，即 $\bar{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$，用 $\bar{Z}$ 代替 $E(Z)$，于是得到参数 ρ 的矩估计为

$$\hat{\rho}=\frac{\beta-1}{r}\bar{Z} \tag{16}$$

其数学期望为

$$E_n(\hat{\rho}) = E_n\left(\frac{\beta-1}{r}\overline{Z}\right) = \frac{\beta-1}{r}E_n(\overline{Z}) = \rho \tag{17}$$

其中 E_n 表示对随机向量 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ 求期望，从而可知估计量 $\hat{\rho}$ 是超参数 ρ 的无偏估计。

用(16)式估计量 $\hat{\rho}$ 替换（9）式中的 ρ，于是可得参数 θ 的 PEB 估计为

$$\hat{\theta}_{EB} = \frac{\frac{\beta-1}{r}\overline{Z} + z}{r+\beta-1} = \frac{(\beta-1)\overline{Z} + zr}{(r+\beta-1)r} \tag{18}$$

其 Bayes 风险为

$$R_E = E_*(\hat{\theta}_{EB} - \theta)^2 = E_*\left(\frac{(\beta-1)\overline{z} + zr}{(r+\beta-1)r} - \theta\right)^2 =$$

$$\frac{1}{(r+\beta-1)^2 r^2}\Big[(\beta-1)^2 E_*(\overline{z}^2) + r^2 E_*(z^2) +$$

$$(r^2 + r\beta - r)^2 E_*(\theta^2) + 2(\beta-1) r E_*(\overline{z}z) -$$

$$2(\beta-1)(r^2 + r\beta - r) E_*(\overline{z}\theta) -$$

$$2r(r^2 + r\beta - r) E_*(z\theta)\Big] \tag{19}$$

其中 E_* 表示对随机向量 $(Z_1, Z_2, \cdots Z_n, (Z, \alpha))$ 求数学期望， 而

$$E(\overline{z}^2) = Var(\overline{z}) + [E(\overline{z})]^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(z) + [E(z)]^2 =$$

$$\frac{\rho^2 r\left[r+\beta-1+nr(\beta-2)\right]}{(\beta-1)^2(\beta-2)n} \tag{20}$$

又因为 $(Z_1, \theta_1), (Z_2, \theta_2), \cdots, (Z_n, \theta_n), (Z_{n+1} = Z, \theta)$ 相互独立，所以 $\overline{Z}$ 与 θ 、$\overline{Z}$ 与 Z 相互独立，于是有

$$E(\overline{z}\theta) = E(\overline{z})E(\theta) = E(z)E(\theta) = \frac{\rho^2 r}{(\beta-1)^2} \tag{21}$$

$$E(\overline{z}z) = E(\overline{z}z) = E(\overline{z})E(z) = [E(z)]^2 = \frac{\rho^2 r^2}{(\beta-1)^2} \tag{22}$$

将 (11)~(13)、(20)~(22)六式全部代入（19），于是可得

$$R_E = \frac{\rho^2}{(r+\beta-1)^2(\beta-1)(\beta-2)nr} \cdot \left[r\beta + \beta^2 - 2\beta - r + 1 + nr^2 + nr\beta - nr\right] \tag{23}$$

如果超参数 β，ρ 均未知，同样可以采用矩估计方法得到参数 β 与 ρ 的估计 $\hat{\beta}$ 与 $\hat{\rho}$，再用它们替换（16）式中的 β，ρ，就可得到参数 θ 的 PEB 估计。

2 估计的小样本性质

定理 1 设 $\hat{\theta}_u$ 和 $\hat{\theta}_{EB}$ 分别为参数 θ 的 UMVUE 和 PEB 估计，当 $\beta > 2$， $n > r > 1$ 时，则有

$$MSE(\hat{\theta}_{EB}) - MSE(\hat{\theta}_u) < 0 \quad 。$$

证明 由引理 3 得

$$MSE(\hat{\theta}_u) = E_{(Z,\theta)}(\hat{\theta}_u - \theta)^2 =$$

$$\frac{1}{r^2}E(z^2) - 2\frac{1}{r}E_{(Z,\theta)}(z\theta) + E(\theta^2) \tag{24}$$

将(11)~ (13)三式全部代入(24)式，可得

$$MSE(\hat{\theta}_u) = \frac{\rho^2}{(\beta-1)(\beta-2)r} \tag{25}$$

又由（23）式可得

$$MSE(\hat{\theta}_{EB}) = E(\hat{\theta}_{EB} - \theta)^2 =$$

$$\frac{\rho^2}{(r+\beta-1)^2(\beta-1)(\beta-2)nr} \cdot \left[r\beta + \beta^2 - 2\beta - r + 1 + nr^2 + nr\beta - nr\right] \tag{26}$$

于是有

$$MSE(\hat{\theta}_{EB}) - MSE(\hat{\theta}_M) =$$

$$\frac{\rho^2(r\beta + \beta^2 - 2\beta - r + 1 + nr^2 + nr\beta - nr)}{(r+\beta-1)^2(\beta-1)(\beta-2)nr} -$$

$$\frac{\rho^2}{(\beta-1)(\beta-2)r} =$$

$$\frac{\rho^2\left(r\beta + \beta^2 - 2\beta - r + 1 + nr^2 + nr\beta - nr - n(r+\beta-1)^2\right)}{(r+\beta-1)^2(\beta-1)(\beta-2)nr}$$

$$= \frac{-(n-1)\rho^2}{(r+\beta-1)(\beta-2)nr} < 0$$

3 估计的大样本性质

定理 2 假设 R_E, R_B 分别为参数 θ 的 PEB 估计

和 Bayes 估计的 Bayes 风险，当 $\beta>2,\ \rho>0$ 时，则有

$$R_E-R_B=o\left(n^{-1}\right)。$$

证明 由（14）、（23）式可知

$$R_E-R_B=E_*\left[\left(\hat{\theta}_{EB}-\theta\right)^2\right]-E_*\left[\left(\hat{\theta}_{BE}-\theta\right)^2\right]=$$

$$\frac{\rho^2\left(r\beta+\beta^2-2\beta-r+1+nr^2+nr\beta-nr\right)}{\left(r+\beta-1\right)^2\left(\beta-1\right)\left(\beta-2\right)nr}-$$

$$\frac{\rho^2}{\left(r+\beta-1\right)\left(\beta-1\right)\left(\beta-2\right)}-$$

$$\frac{\rho^2}{\left(r+\beta-1\right)\left(\beta-2\right)nr}=o\left(n^{-1}\right)$$

由此可知，当 n 较大时参数 θ 的 Bayes 风险可以近似代替 PEB 估计的 Bayes 风险。

关于参数 α 的 Bayes 估计、PEB 估计及其优良性和渐近性可以类似得到。

参考文献：

[1] Arnold B C. Pareto distribution[M]. Fairland，Maryland：John Wiley & Sons, Inc., 1985.

[2] 谢天华,叶鹰. Pareto 分布参数的渐进最优与可容许的经验 Bayes 估计[J]. 应用数学,2006,19(增):237-240.

[3] 侯华蕾,师义民,李豪亮. 双边定数截尾下 Pareto 分布的可靠性[J]. 数理统计与管理,2009,28(5):826-830.

[4] 宋立新,王明秋,王晓光. q-对称熵损失函数下 Pareto 分布参数估计[J]. 大连理工大学学报,2011,51(4):616-620.

[5] 王芳,门慧. 三参数广义帕累托分布的似然矩估计[J]. 数学年刊,2013,34A(3):299-312.

[6] Balakrishnan N,Mi J.Existence and uniqueness of the MLEs for normal distribution based on general progressively type-II censored samples[J].Statistics & probability Letters, 2003,64(4):407-414.

[7] Balakrishnan N,Kannan N ,Lin C T,et al. Point & interval estimation for Gaussian distribution,based on progressively type-II censored samples[J].IEEE Transactions on Reliability, 2003,52(1):90-95.

[8] Balakrishnan N, Aggarwala R. Progressive Censoring: Theory,Methods,and Applications [M]. Boston: Springer Science & Business Media, 2000.

[9] Wu S J,Kus C. On estimation bsaed on progressive first-failure-censored sampling[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2009 ,53:3659-3670.

[10] 王亮,师义民.两参数 Pareto 分布逐步首失效样本的 Bayes 估计[J].系统工程理论与实践,2012,32(11): 498-2503.

[11] 刘荣玄,朱先阳.三参数 Burr 分布族参数的经验 Bayes 估计的优良性[J].系统科学与数学，2013,33(8):913-921.